cours de mathématiques en quatrième

.

Théorème des milieux et parallèles (Thalès)

I. Le théorème des milieux :

1. Activité introductrice :

Construire un triangle ABC et noter I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC].
Que peut-on dire des droites (IJ) et (BC) ?
Estimer le rapport IJ : BC.

2.Le théorème des milieux (partie directe) :

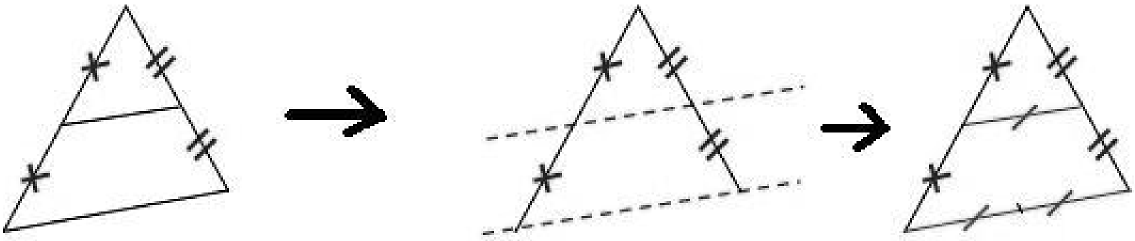
Théorème (partie directe) :

Si dans un triangle une droite passe par les milieux de deux côtés
alors
cette droite (appelée droite des milieux) est parallèle au troisième côté de ce triangle.

Propriété :

Si dans un triangle un segment passe par les milieux de deux côtés
alors
sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté de ce triangle.

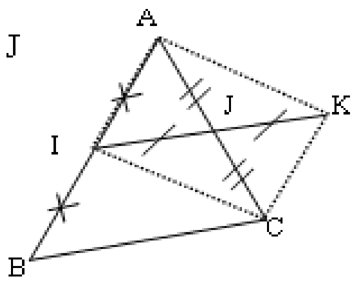
Schématisation du théorème (partie directe) et de la propriété :



Preuve :

Hypothèses :

ABC est un triangle avec I milieu de [AB] et J milieu de [AC].
Soir K le symétrique de I par rapport à J.



Le quadrilatère AKCI est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu J.
On en déduit que (KC) // (IA) soit que (KC) // (BI)
et que KC = IA.
Mais comme I est le milieu de [AB] on a aussi KC = BI
Donc BIKC est un parallélogramme et comme J est le milieux de IK on a :

Conclusion :

• (IK) // (BC) soit (IJ) // (BC) (théorème)
• BC = JK = 2IJ (Propriété).

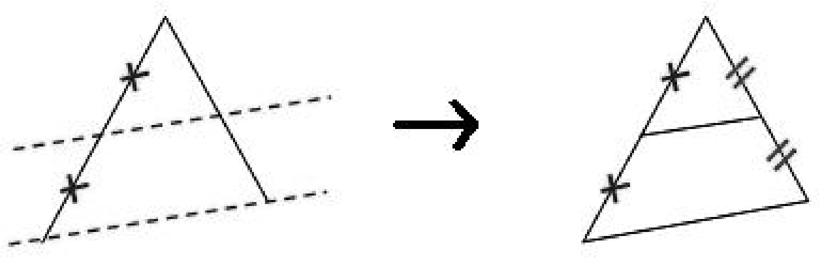
cqfd

3. Le théorème des milieux (partie réciproque) :

Théorème des milieux (partie réciproque) :

Si dans un triangle une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle au second, ALORS cette droite coupe le troisième côté en son milieu.

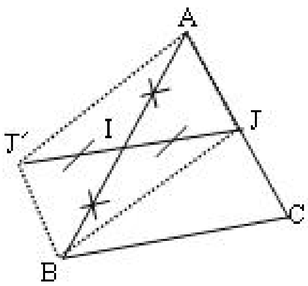
Schématisation du théorème des milieux (partie réciproque) :



Preuve :

Hypothèses :

ABC triangle, I milieu de [AB]. (D) parallèle à (BC) coupe [AC] en J.
On note J' le symétrique de J par rapport à I.



Les droites (J'J) et (AB) ont même milieu I donc AJBJ' est un parallélogramme et AJ = J'B.
On en déduit aussi que (J'B) // (AJ) donc que (J'B) // (JC).
Mais comme J et J' appartiennent à (D) on à aussi (JJ') // (BC) et donc le quadrilatère JCBJ' est un parallélogramme
(car ses côtés opposés sont parallèle deux à deux).
On a donc JC = J'B
Des deux égalités précédentes, on en déduit AJ = JC.

Conclusion :

J est le milieu de [AC].

cqfd

Remarque :

Si les conditions de ce troisième théorème sont remplies, une fois que l'on a démontré la présence du deuxième milieu, les hypothèses du deuxième théorème des milieux sont vérifiées.

II. Le théorème des parallèles :

1. Activité introductrice :

Expérimentations où les élèves constatent l'égalité des rapports.

2. Le théorème des parallèles (admis).

Théorème :

Si dans un triangle une droite passe par deux points des côtés et si elle est parallèle au troisième côté
alors
elle forme un triangle dont les longueurs des côtés sont proportionnelles à celles du triangle initial.

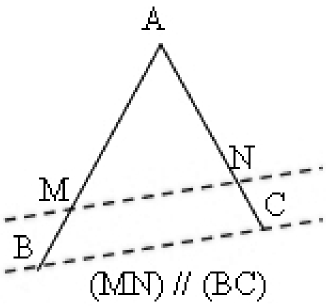
Autrement dit :

Si dans un triangle ABC :
• M appartient à [AB];
• N appartient à [AC];
•(MN) est parallèle à (BC).

alors

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} \quad \left(\text{ou } \frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{MN}\right)$$

Schématisation de la propriété de Thalès :



alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$