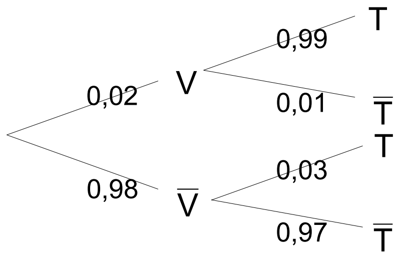
CORRECTION DU BAC BLANC N°1



EXERCICE 1 **4 points**

Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus.

Partie A

On note V l'évènement «la personne est contaminée par le virus» et T l'évènement «le test est positif».

1. a) $p(\mathrm{V})=0,02$, $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{T})=0,99$, $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{V}}}(\overline{\mathrm{T}})=0,97$.

   b) $p(\mathrm{V}\cap\mathrm{T})=p(\mathrm{V})\times p_{\mathrm{V}}(\mathrm{T})=0,02\times0,99=0,0198$.

2. $p(\mathrm{T})=p(\mathrm{T}\cap\mathrm{V})+p(\mathrm{T}\cap\overline{\mathrm{V}})=p(\mathrm{V})\times p_{\mathrm{V}}(\mathrm{T})+p(\overline{\mathrm{V}})\times p_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{T})=0,02\times0,99+0,98\times0,03=0,0492$

   La probabilité que le test soit positif est $0,0492$.

3. a) On cherche si $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{V})\approx0,4$

   $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{V})=\dfrac{p(\mathrm{T}\cap\mathrm{V})}{p(\mathrm{T})}=\dfrac{0,0198}{0,0492}\approx0,402$, donc si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de «chances» que la personne soit contaminée.

   b) On cherche $p_{\mathrm{T}}(\overline{\mathrm{V}})=\dfrac{p(\overline{\mathrm{T}}\cap\overline{\mathrm{V}})}{p(\overline{\mathrm{T}})}=\dfrac{p(\overline{\mathrm{V}})\times p_{\overline{\mathrm{V}}}(\overline{\mathrm{T}})}{1-p(\mathrm{T})}=\dfrac{0,98\times0,97}{1-0,0492}\approx0,9998$

   La probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif est d'environ $0,9998$.

Partie B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. On a une épreuve de Bernoulli qui a pour succès : « la personne est contaminée par le virus » avec une probabilité de $0,02$ et un échec : « la personne n'est pas contaminée par le virus » avec une probabilité de $0,98$

   On répète cette épreuve de Bernoulli de manière indentique et indépendante 10 fois, donc on a un schéma de Bernoulli de 10 répétitions.

   X est la viariable aléatoire qui compte le nombre de personnes contaminées, donc le nombre de succès, donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,02$

2. On cherche $p(\mathrm{X}\geqslant2)=1-p(\mathrm{X}<2)=1-p(\mathrm{X}\leqslant1)$

   Avec la calculatrice $p(\mathrm{X}\leqslant1)\Leftrightarrow0,9838$, donc $p(\mathrm{X}\geqslant2)\approx1-0,9838=0,0162$

   La probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10 est d'environ $0,0162$

EXERCICE 2 **5 points**

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :

$u_0=5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=0,25\,u_n+1,5\times(0,4)^n$

1. a) $u_1=0,25\times5+1,5\times0,4^0=1,25+1,5=2,75$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	5	2,75	1,287	0,562	0,236	0,097	0,040	**0,016 0,**	**0,01**

   b) La conjecture émise à partir du tableau de variation sur le sens de variation de la suite (u_n) est qu'elle semble décroissante.

2. a) Soit (P_n) la propriété : pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2\times(0,4)^n$

Initialisation : $n=0$, $u_0=5$ et $2\times(0,4)^0=2$, comme $u_0>2\times(0,4)^0$, donc (P_0) est vraie.

Hériédité : on suppose qu'il existe un entire k te lque (P_k) : $u_k>2\times(0,4)^k$ est vraie.

Montrons alors que (P_{k+1}) : $u_{k+1}>2\times(0,4)^{k+1}$ est alors vraie aussi.

$u_k>2\times(0,4)^k \Leftrightarrow 0,25\,u_k>0,25\times2\times(0,4)^k=0,5\times(0,4)^k$

$\Leftrightarrow u_{k+1}=0,25\,u_k+1,5\times(0,4)^k>0,5\times(0,4)^k+1,5\times(0,4)^k=2\times(0,4)^k$

Or $0,4<1$ donc $(0,4)^{k+1}<(0,4)^k$, donc $u_{k+1}>2\times(0,4)^{k+1}$

Conclusion : d'après le raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $u_n>2\times(0,4)^n$

b) On admet que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n<0$, la suite (u_n) est donc décroissante et $u_n>2\times(0,4)^n>0$, donc minorée par 0, donc la suite (u_n) est convergente.

3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-10\times(0,4)^n$.

a) $v_{n+1}=u_{n+1}-10\times(0,4)^{n+1}=0,25\,u_n+1,5\times(0,4)^n-10\times(0,4)^{n+1}=0,25\times u_n+0,4^n(1,5-10\times0,4)$

$v_{n+1}=0,25\,u_n-2,5\times(0,4)^n=0,25\left(u_n-10\times(0,4)^n\right)=0,25\,v_n$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,25 et de premier $v_0=u_0-10\times0,4^{05}-10=-5$

b) Comme (v_n) est géométrique, pour tout entier naturel n, on a $v_n=v_0\times0,25^n=-5\times0,25^n$

$u_n=v_n+10\times0,4^n=-5\times0,25^n+10\times0,4^n$

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2), et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n\leqslant0,001$

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0 u prend la valeur 5	
Traitement :	Tant que $\boldsymbol{u>0,001}$.	(1)
	n prend la valeur $\boldsymbol{n+1}$	(2)
	u prend la valeur $\boldsymbol{-5\times0,25^n+10\times0,4^n}$.	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

<u>EXERCICE 3</u> **6 points**

<u>Partie A</u>

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par .

1. $g(x)=\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x+1=\mathrm{e}^x(1-x)+1$ Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}1-x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

2. g est une fonction dérivable sur $[0;+\infty[$ et $g'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-x\,\mathrm{e}^x=-x\,\mathrm{e}^x$

   $\mathrm{e}^x>0$ et $-x\leqslant0$, donc $g'(x)\leqslant0$, donc la fonction g est décroissante sur $[0;+\infty[$

3. On a donc : avec $g(0)=\mathrm{e}^0-0\times\mathrm{e}^0+1=2$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	2 ↘	$-\infty$

4. a) La fonction g est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ dans $]-\infty;2]$ et $0\in]-\infty;2]$, donc d'après le corolaire du théorèmes des valeurs intermédiaires l'équation $g(x)=0$ admet sur $[0;+\infty[$ une unique solution, noté α

   b) A la calculatrice, on a : $g(1)>0$ et $g(2)<0$, donc $1<\alpha<2$
   $g(1,2)>0$ et $g(1,3)<0$, donc $1,2<\alpha<1,3$
   $g(1,27)>0$ et $g(1,28)<0$, donc $1,27<\alpha<1,28$

   c) $g(\alpha)=0\Leftrightarrow e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}+1=0\Leftrightarrow \alpha e^{\alpha}=e^{\alpha}+1$.

5. On a le tableua de signe suivant en utilisant les variations de la fonction g :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

Soit A la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $A(x)=\dfrac{4x}{e^x+1}$

1. La fonction A est dérivable sur $[0;+\infty[$ et
$$A'(x)=\frac{4\times(e^x+1)-4x\times e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{4e^x+4-4xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{4(e^x-xe^x+1)}{(e^x+1)^2}=\frac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$$
   Comme pour tout réel x positif ou nul $(e^x+1)^2>0$, $A'(x)$ est du signe de $g(x)$.

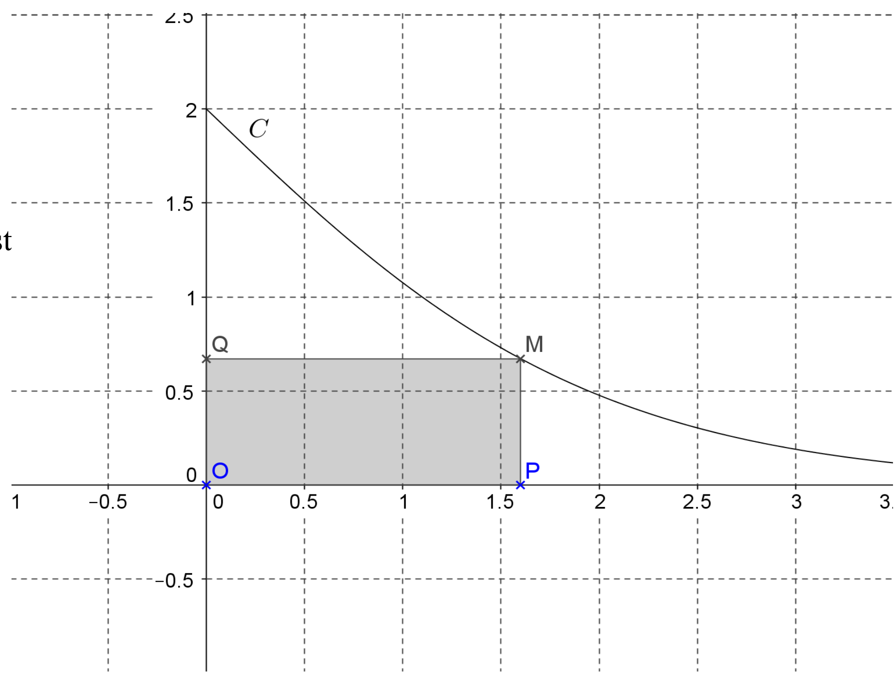
2. On a alors :

x	0		α		$+\infty$
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	0	$\nearrow$	$1,1$	$\searrow$	

$A(\alpha)\Leftrightarrow 1,1$ et $A(0)=0$

Partie C

L'aire du rectangle OPMQ est
$$OP\times OQ=x\times f(x)=\frac{4e^x}{e^x+1}=A(x)$$
D'après la partie B, on sait que $A(x)$ est maximale pour $x=\alpha$,
donc l'aire du rectangle OPMQ est maximale pour le point $M(\alpha;f(\alpha))$ et
$$f(\alpha)=\frac{4}{e^{\alpha}+1}=\frac{4}{\alpha e^{\alpha}},$$
donc $M\left(\alpha;\dfrac{4}{\alpha e^{\alpha}}\right)$



EXERCICE 4 **5 points**

Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée.Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Une réponse qui n'est pas justifiée ne sera pas prise en compte. Toute justification incomplète sera valorisée.

Dans les questions 1 et 2 le plan est rapporté au repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

1. Affirmation 1 : Le point A d'affixe $a=-3-i$, le point B d'affixe $b=2i$ et le point C d'affixe sont $c=\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})i$ alignés.

   Si les points A , B et C sont alignés alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et donc

   $z_{\overrightarrow{AB}}=k\,z_{\overrightarrow{AC}}$

   $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=2i-(-3-i)=2i+3+i=3+3i$ et

   $z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A=\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})i-(-3-i)=\sqrt{2}+2i+\sqrt{2}i+3+i\equiv(3+\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})i$

   On peut constater que $\frac{3+\sqrt{2}}{3}(3+3i)=(3+\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})i$ et donc que

   $\frac{3+\sqrt{2}}{3}z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{AC}}$, donc l'affirmation 1 est vraie.

2. Affirmation 2 : Si un point M, d'affixe z non égale à i , est un point de l'axe imaginaire, alors le point P d'affixe $\frac{z}{\overline{(z-i)}}$ est un point de l'axe réel.

   Si M est un point de l'axe des imaginaires, alors $z_M=z=bi$ et $\overline{(z-i)}=\overline{(bi-i)}=-bi+i$,

   d'où $\frac{z}{\overline{(z-i)}}=\frac{bi}{-bi+i}=\frac{bi}{(-b+1)i}=\frac{b}{-b+1}$

   donc P est un point de l'axe des réels, donc l'affirmation 2 est vraie.

3. Affirmation 3 : Dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z-\overline{z}+1-3i=0$ admet une solution unique.

   Soit $z=a+bi$, alors $\overline{z}=a-bi$ et alors

   $z-\overline{z}+1-3i=0\Leftrightarrow a+bi-(a-bi)+1-3i=0\Leftrightarrow a+bi-a+bi+1-3i=0\Leftrightarrow 1+2bi-3i=0$

   $\Leftrightarrow\begin{cases}1=0\\2b-3=0\end{cases}$, or ce systèmes n'a pas de solution, donc l'affirmation 3 est fausse.

4. Affirmation 4 : La courbe représentant la fonction exponentielle admet une unique tangente passant par l'origine du repère.

   Soit $f(x)=\mathrm{e}^x$, on chaerche les tangentes à cette courbe qui passe par l'origine.

   Soit a un réel quelconque, l'équation de la tangente T au point d'abscisse a est :

   $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

   $f'(x)=\mathrm{e}^x$, donc $f'(a)=\mathrm{e}^a$ et $f(a)=\mathrm{e}^a$

   Donc T a pour équation $y=\mathrm{e}^a(x-a)+\mathrm{e}^a\Leftrightarrow y=\mathrm{e}^a x+\mathrm{e}^a(1-a)$

   Cette tangente T passe par l'origine du repère , si et seulement si, $\mathrm{e}^a(1-a)=0$

   $\mathrm{e}^a(1-a)=0\Leftrightarrow 1-a=0$, car $\mathrm{e}^a>0$

   $\Leftrightarrow a=1$

   Donc l'affirmation 4 est vraie.