

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**SESSION 2022**

## MATHÉMATIQUES

**JOUR 1**

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.*

*L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices.**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

## EXERCICE 1 (7 points)

### **Principaux domaines abordés :**

Probabilités.

Dans une station de ski, il existe deux types de forfait selon l'âge du skieur :

- un forfait JUNIOR pour les personnes de moins de vingt-cinq ans ;
- un forfait SÉNIOR pour les autres.

Par ailleurs, un usager peut choisir, en plus du forfait correspondant à son âge, l'option *coupe-file* qui permet d'écourter le temps d'attente aux remontées mécaniques.

On admet que :

- 20% des skieurs ont un forfait JUNIOR ;
- 80 % des skieurs ont un forfait SÉNIOR ;
- parmi les skieurs ayant un forfait JUNIOR, 6% choisissent l'option coupe-file ;
- parmi les skieurs ayant un forfait SÉNIOR, 12,5% choisissent l'option coupe-file.

On interroge un skieur au hasard et on considère les événements :

- $J$  : « le skieur a un forfait JUNIOR » ;
- $C$  : « le skieur choisit l'option coupe-file ».

*Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.*

### **Partie A**

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité  $P(J \cap C)$ .
3. Démontrer que la probabilité que le skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112.
4. Le skieur a choisi l'option coupe-file. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un skieur ayant un forfait SÉNIOR ? Arrondir le résultat à  $10^{-3}$ .
5. Est-il vrai que les personnes de moins de vingt-cinq ans représentent moins de 15% des skieurs ayant choisi l'option coupe-file ? Expliquer.

## Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112.

On considère un échantillon de 30 skieurs choisis au hasard.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre des skieurs de l'échantillon ayant choisi l'option coupe-file.

1. On admet que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale.  
Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file.  
Arrondir le résultat à  $10^{-3}$ .
3. Calculer la probabilité qu'au plus un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file.  
Arrondir le résultat à  $10^{-3}$ .
4. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$ .

## EXERCICE 2 (7 points)

### Principaux domaines abordés :

Suites ;  
Fonctions, Fonction logarithme.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- Un récipient contenant initialement 1 litre d'eau est laissé au soleil. Toutes les heures, le volume d'eau diminue de 15%. Au bout de quel nombre entier d'heures le volume d'eau devient-il inférieur à un quart de litre ?  
a. 2 heures      b. 8 heures      c. 9 heures      d. 13 heures
- On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$  et  $u_0 = 6$ . On peut affirmer que :  
a. la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.      b. la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.  
c. la suite  $(u_n)$  n'est pas monotone.      d. la suite  $(u_n)$  est constante.
- On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = 4 \ln(3x)$ . Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , on a :  
a.  $f(2x) = f(x) + \ln(24)$       b.  $f(2x) = f(x) + \ln(16)$   
c.  $f(2x) = \ln(2) + f(x)$       d.  $f(2x) = 2f(x)$
- On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]1 ; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1} .$$

On note  $\mathcal{C}_g$  la courbe représentative de la fonction  $g$  dans un repère orthogonal.

La courbe  $\mathcal{C}_g$  admet :

- une asymptote verticale et une asymptote horizontale.
- une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.
- aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale.
- aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $]0 ; 2]$  par :

$$h(x) = x^2(1 + 2 \ln(x)) \text{ .}$$

On note  $\mathcal{C}_h$  la courbe représentative de  $h$  dans un repère du plan.

On admet que  $h$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $]0 ; 2]$ .

On note  $h'$  sa dérivée et  $h''$  sa dérivée seconde.

On admet que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0 ; 2]$ , on a :

$$h'(x) = 4x(1 + \ln(x)) \text{ .}$$

5. Sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{e} ; 2\right]$ , la fonction  $h$  s'annule :

a. exactement 0 fois.

b. exactement 1 fois.

c. exactement 2 fois.

d. exactement 3 fois.

6. Une équation de la tangente à  $\mathcal{C}_h$  au point d'abscisse  $\sqrt{e}$  est :

a.  $y = \left(6e^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x$

b.  $y = (6\sqrt{e}) \cdot x + 2e$

c.  $y = 6e^{\frac{x}{2}}$

d.  $y = \left(6e^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x - 4e$

7. Sur l'intervalle  $]0 ; 2]$ , le nombre de points d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}_h$  est égal à :

a. 0

b. 1

c. 2

d. 3

### EXERCICE 3 (7 points)

#### Principaux domaines abordés :

Suites ;  
Fonctions, Fonction exponentielle.

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = 1 + x - e^{0,5x-2} .$$

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ . On note  $f'$  sa dérivée.

- Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .
  - Démontrer que, pour tout réel  $x$  non nul,  $f(x) = 1 + 0,5x \left( 2 - \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2} \right)$ .  
En déduire la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
- Déterminer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ .
  - Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation  $f'(x) < 0$  est l'intervalle  $]4 + 2\ln(2) ; +\infty[$ .
- Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .  
On fera figurer la valeur exacte de l'image de  $4 + 2\ln(2)$  par  $f$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[-1; 0]$ .

#### Partie B

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f \text{ est la fonction définie à la partie A.}$$

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 4 .$$

- En déduire que la suite  $(u_n)$  converge. On notera  $\ell$  la limite.
- On rappelle que  $\ell$  vérifie la relation  $\ell = f(\ell)$ .  
Démontrer que  $\ell = 4$ .
  - On considère la fonction `valeur` écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur(a):  
    u=0  
    n=0  
    while u<=a:  
        u=1+u-exp(0.5*u-2)  
        n=n+1  
    return n
```

L'instruction `valeur(3.99)` renvoie la valeur 12.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

## EXERCICE 4 (7 points)

### Principaux domaines abordés :

Géométrie dans l'espace.

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(5; 0; -1)$ ,  $B(1; 4; -1)$ ,  $C(1; 0; 3)$ ,  $D(5; 4; 3)$  et  $E(10; 9; 8)$ .

1. a. Soit  $R$  le milieu du segment  $[AB]$ .

Calculer les coordonnées du point  $R$  ainsi que les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

b. Soit  $\mathcal{P}_1$  le plan passant par le point  $R$  et dont  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur normal.  
Démontrer qu'une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}_1$  est :

$$x - y - 1 = 0 .$$

c. Démontrer que le point  $E$  appartient au plan  $\mathcal{P}_1$  et que  $EA = EB$  .

2. On considère le plan  $\mathcal{P}_2$  d'équation cartésienne  $x - z - 2 = 0$  .

a. Justifier que les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont sécants.

b. On note  $\Delta$  la droite d'intersection de  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  .

Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$  est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

3. On considère le plan  $\mathcal{P}_3$  d'équation cartésienne  $y + z - 3 = 0$  .

Justifier que la droite  $\Delta$  est sécante au plan  $\mathcal{P}_3$  en un point  $\Omega$  dont on déterminera les coordonnées.

Si  $S$  et  $T$  sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $MS = MT$  est un plan, appelé plan médiateur du segment  $[ST]$ .  
On admet que les plans  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  sont les plans médiateurs respectifs des segments  $[AB]$ ,  $[AC]$  et  $[AD]$ .

4. a. Justifier que  $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ .

b. En déduire que les points  $A, B, C$  et  $D$  appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.