

✎ Corrigé du baccalauréat Métropole 11 mai 2022 ✎

**Sujet 1**

**ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**

Le sujet propose 4 exercices

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

**EXERCICE 1 (7 points)**

**Thèmes : fonctions et suites**

**Partie A**

1. a. La fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $[0 ; 10]$ . En utilisant les règles de dérivation d'un produit, on obtient :

$$f'(t) = 3e^{-0,5t+1} + 3t \times -0,5e^{-0,5t+1} = e^{-0,5t+1} (+ -3(0,5t + 1)) = (-1,5t + 3)e^{-0,5t+1}$$

$$\text{Donc } \forall t \in [0 ; 10], f'(t) = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$$

- b.  $\forall t \in [0 ; 10], e^{-0,5t+1} > 0$  donc  $f'(t)$  a le même signe que  $-0,5t + 1$ .

$$-0,5t + 1 \geq 0 \iff t \leq 2.$$

$$\text{Dans le tableau : } f(0) = 0, f(2) = 6e^0 = 6 \text{ et } f(10) = 30e^{-5+1} = 30e^{-4}.$$

D'où le tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	2	10
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	6	$30e^{-4}$

- c. Le maximum de la fonction  $f$  est atteint pour  $t = 2$ , et  $f(2) = 6$ . La dose maximale de 6 mg sera atteinte au bout de 2 heures.
2. a. Sur l'intervalle  $[0 ; 2]$ , la fonction  $f$  est continue et strictement croissante à valeurs dans  $[0 ; 6]$ . Or  $5 \in [0 ; 6]$ , donc d'après le corollaire du TVI (théorème des valeurs intermédiaires), l'équation  $f(t) = 5$  admet une unique solution, notée  $\alpha$ , dans l'intervalle  $[0 ; 2]$ .  
À la calculatrice,  $\alpha \approx 1,02$ .
- b. D'après le tableau de variations,  $f(t) \geq 5 \iff t \in [\alpha ; \beta]$ . De plus  $\beta - \alpha = 2,44$  (heures).  
Donc le traitement sera efficace pendant 2,44 heures soit environ 146 minutes.

**Partie A**

1. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, donc il en reste 70 %. Puis on en injecte à nouveau 1,8 mg. Sachant que  $u_0 = 2$ , alors  $u_1 = 0,70 \times 2 + 1,8 = 3,2$ . Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang sera de 3,2 mg.
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $u_n$  désigne la quantité de médicament dans le sang au bout de  $n$  heures. Une heure plus tard, il ne restera que 70 % de la quantité précédente (70 % de  $u_n$ ), puis on en ajoute 1,8 mg par injection.  
Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 1,8$ .

- 3. a.** Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} < 6$ .  
*Initialisation* :  $u_0 = 2$  et  $u_1 = 3,2$ . Donc  $u_0 \leq u_1 < 6$ . L'initialisation est vérifiée.  
*Hérédité* : on suppose que si  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $u_n \leq u_{n+1} < 6$ .  
 Montrons que  $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$ .  
 $u_n \leq u_{n+1} < 6 \iff 0,7 \times u_n \leq 0,7 \times u_{n+1} < 0,7 \times 6 \iff 0,7u_n \leq 0,7u_{n+1} < 4,2$   
 donc  $0,7u_n + 1,8 \leq 0,7u_{n+1} + 1,8 < 4,2 + 1,8 \iff 0,7u_n + 1,8 \leq 0,7u_{n+1} + 1,8 < 6$ .  
 Donc  $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$ . L'hérédité est démontrée.  
*Conclusion* : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang  $n$ , elle l'est aussi au rang  $n + 1$ .  
 D'après l'axiome de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} < 6$ .
- b.** Nous venons de montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} < 6$ . Cela signifie que la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 6. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite  $(u_n)$  converge vers une limite finie notée  $\ell$ .
- c.** La suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  donc  $\ell$  est l'unique solution de l'équation  $\ell = 0,7\ell + 1,8$  (théorème du point fixe).  
 $l = 0,7l + 1,8 \iff 0,3l = 1,8 \iff l = 6$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$
- 4.** On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = -u_n + 6$ .

- a.**  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = -u_{n+1} + 6 = -(0,7 \times u_n + 1,8) + 6 = -0,7u_n + 4,2 = 0,7 \left( -u_n + \frac{4,2}{0,7} \right)$   
 $= 0,7(-u_n + 6) = 0,7v_n$ .  
 Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0,7v_n$  donc la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 0,7 et de premier terme  $v_0 = -u_0 + 6 = 4$ .
- b.**  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0,7^n$ .  
 De plus  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -u_n + 6$  donc  $u_n = -v_n + 6 = 6 - 4 \times 0,7^n$ .
- c.**  $u_n \geq 5,5 \iff 6 - 4 \times 0,7^n \geq 5,5 \iff -4 \times 0,7^n \geq -0,5 \iff 0,7^n \leq \frac{-0,5}{-4}$   
 $\iff \ln(0,7^n) \leq \ln\left(\frac{1}{8}\right) \iff n \times \ln(0,7) \leq -\ln(8) \iff n \geq -\frac{\ln(8)}{\ln(0,7)}$  car  $\ln(0,7) < 0$   
 Donc  $n \geq -\frac{2\ln(2)}{\ln(0,7)}$ . À la calculatrice :  $-\frac{2\ln(2)}{\ln(0,7)} \approx 5,83$  donc  $n \geq 6$ .  
 Cela signifie que  $u_6 \geq 5,5$ . Il faudra donc au total 7 injections (de l'injection initiale  $u_0$  à la 7<sup>e</sup> qui correspond à  $u_6$ ).

**EXERCICE 2 (7 points)**

**Thème : géométrie dans l'espace.**

- 1. a.** La droite  $\mathcal{D}$  dont une représentation paramétrique est  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  a pour vec-

teur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- b.** Si  $B$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$  alors  $\exists t \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ 3 = 2 - t \\ 0 = 2 + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = -2 \\ -t = 1 \\ 2t = -2t \end{cases} \iff t = -1. \text{ Donc } B \in \mathcal{D}.$$

c. On a  $A(-1; 1; 3)$  et  $B(-1; 3; 0)$ . Donc  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Alors  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \times 2 + 2 \times (-1) + (-3) \times 2 = -8$

2. a. Le plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A$  est orthogonal à la droite  $\mathcal{D}$ . Donc  $\mathcal{P}$  a pour vecteur normal le vecteur  $\vec{u}$  (vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ ).

Son équation cartésienne sera de la forme  $ax + by + cz + d = 0$ , où  $(a; b; c)$  sont les coordonnées d'un vecteur normal au plan.

En prenant comme vecteur normal à  $\mathcal{P}$  le vecteur  $\vec{u}$ , on obtient :  $\mathcal{P} : 2x - y + 2z + d = 0$ . Or  $A \in \mathcal{P}$  donc  $-2 - 1 + 6 + d = 0$  donc  $d = -3$ . Donc  $\mathcal{P}$  a pour équation  $2x - y + 2z - 3 = 0$

- b. Le projeté orthogonal de  $A$  sur la droite  $\mathcal{D}$ , noté  $H$ , est l'unique point d'intersection de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}$ . Résolvons donc le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \text{ . On remplace } x, y \text{ et } z \text{ dans la première équation :}$$

$$2x - y + 2z - 3 = 0 \iff 1(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0 \iff 9t + 1 = 0 \iff t = -\frac{1}{9}$$

On remplace la valeur de  $t$  dans les trois dernières équations :

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \times -\frac{1}{9} = \frac{7}{9} \\ y = 2 - \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{19}{9} \\ z = 2 + 2 \times -\frac{1}{9} = \frac{16}{9} \end{cases} \text{ . Donc } H\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$$

- c. Déterminons les coordonnées de  $\overrightarrow{AH}$  avec  $A(-1; 1; 3)$  et  $H\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$  :  $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ \frac{10}{9} \\ -\frac{11}{9} \end{pmatrix}$ .

$$\text{Donc } \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(-\frac{11}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{477}}{9} = \frac{\sqrt{53}}{3}$$

3. a. Les points  $H$  et  $B$  appartiennent à  $\mathcal{D}$ , donc le vecteur  $\overrightarrow{HB}$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ , tout comme  $\vec{u}$ . Donc les vecteurs  $\overrightarrow{HB}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires donc  $\exists k \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{HB} = k \times \vec{u}$ .

- b. D'après les propriétés du produit scalaire, et en utilisant la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u}$$

Or les points  $A$  et  $H$  appartiennent au plan  $\mathcal{P}$  normal à la droite  $\mathcal{D}$ , donc tout vecteur de  $\mathcal{P}$  est orthogonal à tout vecteur de  $\mathcal{D}$  donc  $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$  donc  $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ .

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = k \times \vec{u} \cdot \vec{u} = k \vec{u}^2 = k \|\vec{u}\|^2 \text{ donc } k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

- c. On a  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  donc  $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = -8$  donc  $k = \frac{-8}{3^2} = -\frac{8}{9}$ .

$$\text{Donc en posant } H(x; y; z) \text{ et } B(-1; 3; 0) \text{ alors } \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 - x \\ 3 - y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\text{De plus } \vec{HB} = k \times \vec{u} = -\frac{8}{9} \times \vec{u} \text{ donc } \begin{cases} -1-x &= -\frac{8}{9} \times 2 \\ 3-y &= -\frac{8}{9} \times (-1) = \frac{19}{9} \\ -z &= -\frac{8}{9} \times 2 \end{cases}$$

Donc  $x = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9}$ ,  $y = 3 - \frac{8}{9} = \frac{19}{9}$  et  $z = \frac{16}{9}$ . On retrouve les coordonnées du point  $H$ .

4. Les points  $A$ ,  $H$  et  $C$  appartiennent au plan  $\mathcal{P}$ .  $H$  est le projeté orthogonal de  $B$  sur  $\mathcal{P}$ . Le tétraèdre  $BAHC$  a pour base le triangle  $AHC$  et pour hauteur  $BH$ .

$$\text{Donc } \mathcal{V}_{BAHC} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AHC} \times BH \text{ d'où } \mathcal{A}_{AHC} = \frac{3 \times \mathcal{V}_{BAHC}}{BH}.$$

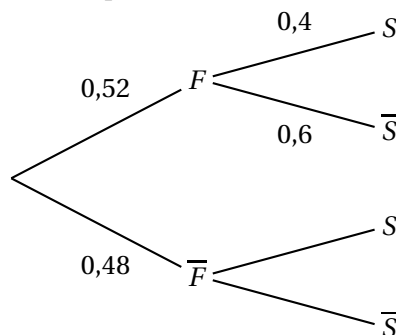
$$\text{D'après la question 3.c, } \vec{HB} = k \times \vec{u} = \text{donc } \vec{HB} \left( \begin{matrix} \frac{16}{9} \\ -\frac{8}{9} \\ \frac{16}{9} \end{matrix} \right) \text{ donc } HB = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(-\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2} = \frac{8}{3}$$

$$\text{Donc } \mathcal{A}_{AHC} = \frac{3 \times \frac{8}{9}}{\frac{8}{3}} = 1 \text{ unité d'aire.}$$

**EXERCICE 3 (7 points)**

**Thèmes : probabilité, loi binomiale.**

1. a. L'énoncé nous indique que ce stage a été suivi par 25 % des salariés. Donc  $p(S) = 0,25$ .  
 b. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



c. On calcule  $p(F \cap S)$  :  $p(F \cap S) = p_S(F) \times p(S) = 0,4 \times 0,52 = 0,208$

d. On cherche calculer  $p_S(F)$ . D'après la formule de Bayes,

$$p_S(F) = \frac{p(F \cap S)}{p(S)} = \frac{0,208}{0,25} = 0,832$$

e. Appliquons la formule des probabilités totales :  $p(S) = p(S \cap F) + p(S \cap \bar{F})$ .

$$\text{Donc } p(S \cap \bar{F}) = p(S) - p(S \cap F) = 0,25 - 0,208 = 0,042.$$

$$\text{Avec la formule de Bayes : } p_{\bar{F}}(S) = \frac{p(S \cap \bar{F})}{p(\bar{F})} = \frac{0,042}{0,48} = 0,00875 < 0,1.$$

L'affirmation du directeur est donc exacte.

2. a. Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles.  $X$  suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 20$  et  $p = 0,25$  :  $X \sim \mathcal{B}(20; 0,25)$

b.  $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,25^5 \times (1 - 0,25)^{20-5} \approx 0,202.$

La probabilité qu'exactement 5 salariés suivent le stage est d'environ 0,202.

- c. « proba(5) » calcule pour  $k$  allant de 0 à 5, la somme des probabilités  $p(X = k)$ ,  
 Soit  $p(X \leq 5)$ . À la calculatrice,  $p(X \leq 5) \approx 0,617$ .  
 Cela signifie que la probabilité qu'au plus 5 salariés aient effectué le stage, est égale à 0,617.  
 La probabilité qu'au moins 6 salariés suivent le stage est d'environ 0,617.
- d.  $p(X \geq 6) = 1 - p(X < 6) = 1 - p(X \leq 5) \approx 1 - 0,617 \approx 0,383$
3. Il suffit ici de faire une moyenne pondérée : 25 % des salariés toucheront une augmentation de 5 %, et 75 %, seulement 2 %. Soit  $0,25 \times 5 + 0,75 \times 2 = 2,75$  %.  
 Les salariés toucheront une augmentation moyenne de 2,75 %.

**EXERCICE 4 (7 points)**

**Thèmes : fonctions, convexité, limites.**

1. Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$ .

Pour  $x \neq 0$ ,  $f(x) = \frac{x^2 \left( -2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ .

Donc la droite horizontale d'équation  $y = -2$  est une asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$ .

**Réponse c**

2. La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc admet des primitives. Soit  $F$  une primitive de  $f$ .  
 $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  est de la forme  $u'(x) \times e^{u(x)}$ , et admet pour primitives les fonctions  $x \mapsto e^{u(x)} + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

En posant  $u(x) = x^2$  et  $u'(x) = 2x$ , et en remarquant que  $f(x) = \frac{1}{2} \times 2x e^{x^2}$ , on peut donc écrire :  
 $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{1}{2} \times e^{x^2} + k$ .

Sachant que  $F(0) = 1$  on en déduit que :  $\frac{1}{2} + k = 1$  donc  $k = \frac{1}{2}$ .

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}$

**Réponse d**

3. La courbe représentative est celle de la fonction  $f'$ . Avec la précision permise par le graphique, on peut affirmer que la fonction  $f'$  est croissante sur  $] -\infty ; 3]$  et décroissante sur  $[3 ; +\infty[$ .  
 $[0 ; 2] \subset ] -\infty ; 3]$ , donc  $f'$  est croissante  $[0 ; 2]$ .  
 La fonction est donc convexe sur  $[0 ; 2]$ .

**Réponse c**

4. La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$  est continue et dérivable.  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) > 0$ .  
 Les primitives de la fonction  $f$ , ont pour dérivée  $f$ , qui est positive sur  $\mathbb{R}$ .  
 Donc les fonctions  $F$  sont croissantes sur  $\mathbb{R}$ .

**Réponse a**

5.  $\forall x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{2 \ln(x)}{x^2 + 1} = 2 \frac{x^2 \times \frac{\ln(x)}{x^2}}{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)} = 2 \frac{\frac{\ln(x)}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$ .

Nous savons que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$  (croissances comparées) et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

**Réponse d**

6.  $\forall x \in \mathbb{R}, (E) e^{2x} + e^x - 12 = 0 \iff (e^x)^2 + e^x - 12 = 0.$

On pose comme changement de variable :  $X = e^x$  :  $(E) \iff X^2 + X - 12 = 0.$  Cette équation a pour solutions  $X = -4$  et  $X = -3.$

Or  $X = e^x > 0$  donc l'unique solution sera celle de l'équation  $X = e^x = 3 \iff x = \ln(3).$  **Réponse c**