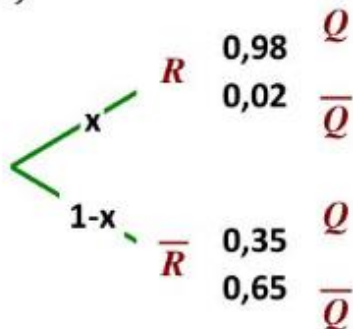


**Baccalauréat – Spécialité Mathématiques**  
**Corrigé – Jour 2 France métropolitaine 20/06/24**

**Exercice 1 :**

1.  $P(Q) = 0,917$  et  $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0,65$
2. a)



- b) D'après la loi des probabilités totales,  $P(Q) = P(R \cap Q) + P(\bar{R} \cap Q)$   
 soit :  $0,917 = 0,98x + 0,35(1 - x) \Leftrightarrow 0,567 = 0,63x \Leftrightarrow x = 0,9$

3. On cherche  $P_Q(R) = \frac{P(R \cap Q)}{P(Q)} = \frac{0,9 \times 0,98}{0,917} \approx 0,962$
4. On cherche  $k$  tel que  $P(N \geq k) \geq 0,65$   
 soit  $1 - P(N < k) \geq 0,65 \Leftrightarrow P(N \leq k - 1) \leq 0,35$   
 A la calculatrice :  $P(X \leq 11) \approx 0,351$  et  $P(X \leq 10) \approx 0,203$   
 Donc  $k - 1 = 10$  et  $k = 11$ .  
 A partir de la note 11, 65% des étudiants seront récompensés.
5. Chaque variable aléatoire  $N_i$  suit la même loi binomiale que  $N$ , d'espérance  $E(N) = 20 \times 0,615 = 12,3$  et de variance  $V(N) = 20 \times 0,615 \times 0,385 = 4,7355$   
 Par linéarité,  $E(S) = 10E(N) = 123$   
 Et comme les variables  $N_i$  sont indépendantes,  $V(S) = 10V(N) = 47,355$
6. a)  $M$  modélise la moyenne des notes sur 10 étudiants  
 b)  $E(M) = E\left(\frac{S}{10}\right) = \frac{1}{10}E(S) = 12,3$   
 $V(M) = V\left(\frac{S}{10}\right) = \frac{1}{10^2}V(S) = 0,47355$   
 c) On cherche  $P(10,3 < M < 14,3) = P(|M - 12,3| < 2) = P(|M - E(M)| < 2)$   
 Or par l'inégalité de Bienaymé Tchebychev,  
 $P(|M - E(M)| \geq 2) \leq \frac{V(M)}{2^2}$  soit  $P(|M - E(M)| \geq 2) \leq \frac{0,47355}{4}$  et  $\frac{0,47355}{4} \approx 0,12$   
 Donc  $P(|M - E(M)| \geq 2) \leq 0,12$   
 Soit  $1 - P(|M - E(M)| \geq 2) \geq 0,88$

Ce qui donne  $P(|M - E(M)| < 2) \geq 0,88$ .

Donc la probabilité que la moyenne des notes de 10 étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80%.

## Exercice 2 :

### Partie A :

1. On ajoute 15 g soit 15000mg de chlore dans une piscine qui contient  $50m^3$  soit 50000L d'eau.

Le taux de chlore augmente donc de  $\frac{15000}{50000} = 0,3mg.L^{-1}$ .

2. a. On démontre par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , la propriété  $\mathcal{P}_n : v_n \leq v_{n+1} \leq 4$ .

#### Initialisation

Pour  $n = 0$ , on a  $v_0 = 0,7$  et  $v_1 = 0,92 \times 0,7 + 0,3 = 0,944$  donc la propriété est vraie au rang 0.

#### Hérédité

Soit un certain entier naturel  $k$  fixé, on suppose que la propriété est vraie au rang

$$k : v_k \leq v_{k+1} \leq 4$$

et on démontre qu'alors la propriété est vraie aussi au rang  $k + 1$  :

Si  $v_k \leq v_{k+1} \leq 4$  (hypothèse de récurrence  $\mathcal{P}_k$ )

$$\text{alors } 0,92 v_k \leq 0,92 v_{k+1} \leq 4 \times 0,92$$

puis  $0,92 v_k + 0,3 \leq 0,92 v_{k+1} + 0,3 \leq 4 \times 0,92 + 0,3$  c.-à-d.  $v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 3,98 \leq 4$  donc la propriété est vraie au rang  $k + 1$ .

#### Conclusion

La propriété est initialisée et est héréditaire donc par principe de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$ .

- b. Par la question précédente, la suite  $(v_n)$  est croissante et majorée par 4, donc d'après un théorème de convergence monotone, elle est convergente vers  $l$ .

Par unicité de la limite,  $l$  doit vérifier :  $l = 0,92l + 0,3 \Leftrightarrow l = 3,75$ .

La limite de la suite est 3,75.

3. Non, car à long terme, le taux de chlore de la piscine sera supérieur à  $3mg.L^{-1}$ .

4. Def alerte\_chlore(s) :

$$n = 0$$

$$v = 0,7$$

while  $v \leq s$ :

$$n = n + 1$$

$$v = 0,92 * v + 0,3$$

return  $n$

5. La valeur renvoyée par alerte\_chlore(3) est 17.

Au bout de 17 jours, le taux de chlore aura dépassé  $3mg.L^{-1}$ .

## Partie B :

1. L'équation différentielle (E) est de la forme  $y' = ay + b$

Les solutions sont de la forme  $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$  où  $C \in \mathbb{R}$

Ici  $a = -0,08$  et  $b = \frac{q}{50}$  donc la fonction  $f$  est de la forme  $f(x) = Ce^{-0,08x} - \frac{\frac{q}{50}}{-0,08}$  soit  $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$  où  $C \in \mathbb{R}$

2. a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -0,08x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  donc par composition de limites

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,08x} = 0$ . Par produit et somme de limites, on a donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{q}{4}$

b. On sait  $f(0) = 0,7$  donc  $Ce^0 + \frac{q}{4} = 0,7$  soit  $C = -\frac{q}{4} + 0,7$

et si le taux de chlore doit être stabiliser autour de  $2 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ , cela signifie que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  donc  $\frac{q}{4} = 2$  soit  $q = 8$ .

Ainsi  $q = 8$  et  $C = -2 + 0,7 = -1,3$ .

## Exercice 3

### Partie A :

1.  $f(-1) = -2$  et  $f'(-1) = 1$

2. La fonction  $f$  n'est pas convexe sur son ensemble de définition, elle est d'abord concave puis convexe avec un point d'inflexion à environ  $-1,2$ . En effet on le remarque en fonction de la position de la courbe par rapport à la tangente.

3. L'équation  $f(x) = 0$  semble avoir une seule solution, une valeur approchée à  $0,1$  près de la solution est  $0,1$ .

**Partie B :**

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$$

1)  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 2x - 1) = -1$

$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (x + 2) = 0^+$  par composition  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \ln(x + 2) = -\infty$

Par somme de limites,  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$

La courbe admet une asymptote verticale d'équation  $x = -2$ .

2)  $f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+2} = \frac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2} = \frac{2x^2+6x+5}{x+2}$

3) Sur  $] -2 ; +\infty[$ ,  $x + 2 > 0$  Le signe de la dérivée ne dépend donc que du signe du trinôme  $2x^2 + 6x + 5$ .

$2x^2 + 6x + 5 = 0$   $\Delta = -4$  Le discriminant est négatif donc  $2x^2 + 6x + 5$  est du signe de  $a$  donc positif.

$x$	$-2$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	
Variations de $f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4) Sur  $] -2 ; +\infty[$ ,  $f$  est continue (car dérivable) et strictement croissante.

$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . On a bien  $0 \in ] -\infty ; +\infty[$ . D'après le corollaire du

théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  appartenant à  $] -2 ; +\infty[$ .

Par balayage sur la calculatrice :  $\alpha > -2$

$$0,1 < \alpha < 0,2$$

$$0,11 < \alpha < 0,12$$

$$0,117 < \alpha < 0,118 \text{ donc } \alpha \approx 0,12.$$

5) D'après les questions précédentes,

$$f(x) \geq 0 \text{ si } x \in [\alpha; +\infty[ \text{ et } f(x) \leq 0 \text{ si } x \in ]-2; \alpha].$$

6) Il faut calculer  $f''(x)$ .

$$f''(x) = \frac{(4x+6)(x+2) - (2x^2+6x+5)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$$

Sur  $] -2 ; +\infty[$ ,  $(x+2)^2 > 0$  Le signe de la dérivée seconde ne dépend donc que du signe du trinôme  $2x^2 + 8x + 7$ .

$2x^2 + 8x + 7 = 0 \quad \Delta = 8$  Le discriminant est positif donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ et } x_2 = -2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$x_1 \notin ]-2 ; +\infty[$ .

$x$	$-2$	$x_2$	$+\infty$
signe de $f''(x)$	$-$	$0$	$+$

Ainsi  $f$  admet un unique point d'inflexion, au point d'abscisse  $x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Partie C

1) Pour  $x \in ]-2 ; +\infty[$ ,  $h(x) = JM^2 = x^2 + (g(x) - 1)^2$  par la formule de la distance  
Donc  $h(x) = x^2 + (\ln(x+2) - 1)^2$

2) a.  $h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$

Sur  $] -2 ; +\infty[$ , le signe de  $h'(x)$  est le même que le signe de  $f(x)$ .

$x$	$-2$	$\alpha$	$+\infty$
signe de $h'(x)$	$-$	$0$	$+$
variations de $h(x)$			

b)  $h$  donc  $JM^2$  admet un minimum en  $x = \alpha$ , donc comme la fonction racine carrée est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ ,  $JM$  est minimale pour  $x = \alpha$ .

3) a. d'après B4),

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$$

b. Le coefficient directeur de la tangente à Cg au point  $M_\alpha$  est  $g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha+2}$   
 Le coefficient directeur de la droite  $(JM_\alpha)$  est  $a = \frac{g(\alpha)-1}{\alpha} = \frac{\ln(\alpha+2)-1}{\alpha} = \frac{-2\alpha-\alpha^2}{\alpha}$  par la question a.

Or  $g'(\alpha) \times a = \frac{1}{\alpha+2} \times \frac{-2\alpha-\alpha^2}{\alpha} = -1$  donc les droites sont bien perpendiculaires.

#### Exercice 4 :

Affirmation 1 : VRAI

Vérifions que les points appartiennent au plan P :

Pour A :  $16-0+0-16=0$  Donc  $A \in P$

Pour C :  $32 - 20 + 4 - 16 = 0$  Donc  $C \in P$

Pour D :  $0 - 0 + 16 - 16 = 0$  . Donc  $D \in P$

Les points A,C et D ne sont pas alignés (car vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$  non colinéaires) donc ils définissent un plan.

Affirmation 2 : FAUX

Cherchons si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont coplanaires.

Cherchons s'il existe des réels a et b tels que  $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AD}$

$$\text{Soit } \begin{cases} -2 = 2a - 2b \\ 4 = 4a \\ 3 = a + 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ Système non compatible, les vecteurs ne sont pas}$$

coplanaires donc les points non plus.

Affirmation 3 : VRAI

Les vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BH}$  ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.

Trouvons les représentations paramétriques des deux droites :

$$(AC) : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} \quad (BH) : \begin{cases} x = -t' \\ y = 4 - 3t' \\ z = 3 - t' \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}$$

$$\text{On résout : } \begin{cases} -t' = 2 + 2t \\ 4 - 3t' = 4t \\ 3 - t' = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 8 \\ t' = 8 \\ t = -5 \end{cases}$$

Donc les droites sont sécantes.

Affirmation 4 : VRAI

(DH) est orthogonale au plan (ABC) car

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \text{ et } \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ .}$$

Vérifions si H appartient à (ABC) :  $-1 - 1 + 4 - 2 = 0$  Donc oui.