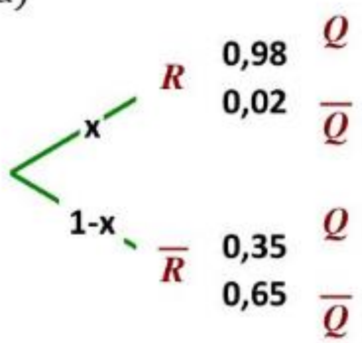
Baccalauréat – Spécialité Mathématiques

Corrigé – Jour 2 France métropolitaine 20/06/24

Exercice 1 :

1. $P(Q) = 0{,}917$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0{,}65$
2. a)



b) D'après la loi des probabilités totales, $P(Q) = P(R \cap Q) + P(\bar{R} \cap Q)$
soit : $0{,}917 = 0{,}98x + 0{,}35(1 - x) \Leftrightarrow 0{,}567 = 0{,}63x \Leftrightarrow x = 0{,}9$

3. On cherche $P_Q(R) = \frac{P(R\cap Q)}{P(Q)} = \frac{0{,}9\times 0{,}98}{0{,}917} \approx 0{,}962$
4. On cherche k tel que $P(N \geq k) \geq 0{,}65$
soit $1 - P(N < k) \geq 0{,}65 \Leftrightarrow P(N \leq k - 1) \leq 0{,}35$
A la calculatrice : $P(X \leq 11) \approx 0{,}351$ et $P(X \leq 10) \approx 0{,}203$
Donc $k - 1 = 10$ et $k = 11$.
A partir de la note 11, 65% des étudiants seront récompensés.
5. Chaque variable aléatoire N_i suit la même loi binomiale que N, d'espérance E(N)=$20 \times 0{,}615 = 12{,}3$ et de variance V(N)=$20 \times 0{,}615 \times 0{,}385 = 4{,}7355$
Par linéarité, $E(S) = 10E(N) = 123$
Et comme les variables N_i sont indépendantes, V(S)=10V(N)=47,355

6. a) M modélise la moyenne des notes sur 10 étudiants
b) $E(M) = E\left(\frac{S}{10}\right) = \frac{1}{10}E(S) = 12{,}3$
$V(M) = V\left(\frac{S}{10}\right) = \frac{1}{10^2}V(S) = 0{,}47355$
c) On cherche $P(10{,}3 < M < 14{,}3) = P(|M - 12{,}3| < 2) = P(|M - E(M)| < 2)$
Or par l'inégalité de Bienaymé Tchebychev,
$P(|M - E(M)| \geq 2) \leq \frac{V(M)}{2^2}$ soit $P(|M - E(M)| \geq 2) \leq \frac{0{,}47355}{4}$ et $\frac{0{,}47355}{4} \approx 0{,}12$
Donc $P(|M - E(M)| \geq 2) \leq 0{,}12$
Soit $1 - P(|M - E(M)| \geq 2) \geq 0{,}88$

Ce qui donne $P(|M - E(M)| < 2) \geq 0{,}88$.
Donc la probabilité que la moyenne des notes de 10étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80%.

Exercice 2 :

Partie A :

1. On ajoute 15 g soit 15000mg de chlore dans une piscine qui contient $50m^3$ soit 50000L d'eau.
   Le taux de chlore augmente donc de $\frac{15000}{50000} = 0{,}3mg.L^{-1}$.

2. a. On démontre par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n : v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

Initialisation

Pour $n = 0$, on a $v_0 = 0{,}7$ et $v_1 = 0{,}92 \times 0{,}7 + 0{,}3 = 0{,}944$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité

Soit un certain entier naturel k fixé, on suppose que la propriété est vraie au rang $k :\ v_k \leq v_{k+1} \leq 4$
et on démontre qu'alors la propriété est vraie aussi au rang $k + 1$:
Si $v_k \leq v_{k+1} \leq 4$ (hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_k$)
alors $0{,}92\, v_k \leq 0{,}92 v_{k+1} \leq 4 \times 0{,}92$
puis $0{,}92\, v_k + 0{,}3 \leq 0{,}92 v_{k+1} + 0{,}3 \leq 4 \times 0{,}92 + 0{,}3$ c.-à-d. $v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 3{,}98 \leq 4$ donc la propriété est vraie au rang $k + 1$.

Conclusion

La propriété est initialisée et est héréditaire donc par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

b. Par la question précédente, la suite (v_n) est croissante et majorée par 4, donc d'après un théorème de convergence monotone, elle est convergente vers l.

Par unicité de la limité, l doit vérifier : $l = 0{,}92l + 0{,}3 \Leftrightarrow l = 3{,}75$.

La limite de la suite est 3,75.

3. Non, car à long terme, le taux de chlore de la piscine sera supérieur à $3mg.L^{-1}$.
4. Def alerte_chlore(s) :
   $n = 0$
   $v = 0{,}7$
   $while\ v \leq s$:
   $n = n + 1$
   $v = 0{,}92 * v + 0{,}3$
   $return\ n$
5. La valeur renvoyée par alerte_chlore(3) est 17.
   Au bout de 17 jours, le taux de chlore aura dépassé $3mg.L^{-1}$.

Partie B :

1. L'équation différentielle (E) est de la forme $y' = ay + b$
   Les solutions sont de la forme $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où $C \in \mathbb{R}$
   Ici $a = -0{,}08$ et $b = \frac{q}{50}$ donc la fonction f est de la forme $f(x) = Ce^{-0{,}08x} - \frac{\frac{q}{50}}{-0{,}08}$ soit $f(x) = Ce^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}$ où $C \in \mathbb{R}$
2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} -0{,}08x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ donc par composition de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0{,}08x} = 0$. Par produit et somme de limites, on a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{q}{4}$

   b. On sait $f(0) = 0{,}7$ donc $Ce^{0} + \frac{q}{4} = 0{,}7$ soit $C = -\frac{q}{4} + 0{,}7$
   et si le taux de chlore doit être stabiliser autour de 2 $mg.L^{-1}$, cela signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ donc $\frac{q}{4} = 2$ soit $q = 8$.
   Ainsi $q = 8$ et $C = -2 + 0{,}7 = -1{,}3$.

Exercice 3

Partie A :

1. $f(-1) = -2$ et $f'(-1) = 1$
2. La fonction f n'est pas convexe sur son ensemble de définition, elle est d'abord concave puis convexe avec un point d'inflexion à environ -1,2. En effet on le remarque en fonction de la position de la courbe par rapport à la tangente.
3. L'équation $f(x) = 0$ semble avoir une seule solution, une valeur approchée à 0,1 près de la solution est 0,1.

Partie B :

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + ln(x + 2)$$

1) $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 2x - 1) = -1$

   $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} (x + 2) = 0^+$ par composition $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} ln(x + 2) = -\infty$

   Par somme de limites, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$

   La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

2) $f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+2} = \frac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2} = \frac{2x^2+6x+5}{x+2}$
3) Sur $]-2\,;+\infty[$, $x + 2 > 0$ Le signe de la dérivée ne dépend donc que du signe du trinôme $2x^2 + 6x + 5$.

   $2x^2 + 6x + 5 = 0 \quad \Delta = -4$ Le discriminant est négatif donc $2x^2 + 6x + 5$ est du signe de a donc positif.

x	-2 $+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$
Variations de $f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

4) Sur $]-2\,;+\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante.

   $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On a bien $0 \in]-\infty; +\infty[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\propto$ appartenant à $]-2\,;+\infty[$.

   Par balayage sur la calculatrice : $\propto > -2$

   $0{,}1 < \propto < 0{,}2$

$0,11 < \alpha < 0,12$

$0,117 < \alpha < 0,118$ donc $\alpha \approx 0,12$.

5) D'après les questions précédentes,
$f(x) \geq 0$ si $x \in [\alpha; +\infty[$ et $f(x) \leq 0$ si $x \in]-2; \alpha]$.

6) Il faut calculer $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{(4x+6)(x+2) - (2x^2+6x+5)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$$

Sur $]-2\,;+\infty[$, $(x+2)^2 > 0$ Le signe de la dérivée seconde ne dépend donc que du signe du trinôme $2x^2 + 8x + 7$.

$2x^2 + 8x + 7 = 0$ $\Delta = 8$ Le discriminant est positif donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $x_2 = -2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$x_1 \notin]-2\,;+\infty[$.

x	-2	$x2$	$+\infty$
signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$

Ainsi f admet un unique point d'inflexion, au point d'abscisse $x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Partie C

1) Pour $x \in]-2\,;+\infty[$, $h(x) = JM^2 = x^2 + (g(x) - 1)^2$ par la formule de la distance
Donc $h(x) = x^2 + (\ln(x+2) - 1)^2$

2) a. $h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$
Sur $]-2\,;+\infty[$, le signe de $h'(x)$ est le même que le signe de $f(x)$.

x	-2	α	$+\infty$
signe de $h'(x)$	$-$	0	$+$
variations de $h(x)$	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$

b) h donc JM^2 admet un minimum en $x = \alpha$, donc comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, JM est minimale pour $x = \alpha$.

3) a. d'après B4),
$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$

b. Le coefficient directeur de la tangente à Cg au point $M_\propto$ est $g'(\propto) = \frac{1}{\propto+2}$

Le coefficient directeur de la droite $(JM_\propto)$ est $a = \frac{g(\propto)-1}{\propto} = \frac{\ln(\propto+2)-1}{\propto} = \frac{-2\propto-\propto^2}{\propto}$ par la question a.

Or $g'(\propto) \times a = \frac{1}{\propto+2} \times \frac{-2\propto-\propto^2}{\propto} = -1$ donc les droites sont bien perpendiculaires.

Exercice 4 :

Affirmation 1 : VRAI

Vérifions que les points appartiennent au plan P :

Pour A : 16-0+0-16=0 Donc $A \in P$

Pour C : $32 - 20 + 4 - 16 = 0$ Donc $C \in P$

Pour D : $0 - 0 + 16 - 16 = 0$. Donc $D \in P$

Les points A,C et D ne sont pas alignés (car vecteurs $\overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{AD}$ non colinéaires) donc ils définissent un plan.

Affirmation 2 : FAUX

Cherchons si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Cherchons s'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AC} + b\,\overrightarrow{AD}$

Soit $\begin{cases} -2 = 2a - 2b \\ 4 = 4a \\ 3 = a + 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$ Système non compatible, les vecteurs ne sont pas coplanaires donc les points non plus.

Affirmation 3 : VRAI

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{BH}$ ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.

Trouvons les représentations paramétriques des deux droites :

(AC) : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$ (BH) : $\begin{cases} x = -t' \\ y = 4 - 3t' \quad \text{où } t' \in \mathbb{R} \\ z = 3 - t' \end{cases}$

On résout : $\begin{cases} -t' = 2 + 2t \\ 4 - 3t' = 4t \\ 3 - t' = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 8 \\ t' = 8 \\ t = -5 \end{cases}$

Donc les droites sont sécantes.

Affirmation 4 : VRAI

(DH) est orthogonale au plan (ABC) car
$\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AC} = 0$ et $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AB} = 0$.
Vérifions si H appartient à (ABC) : $-1 - 1 + 4 - 2 = 0$ Donc oui.