Baccalauréat 2024 - Spécialité Maths
Correction Métropole

Sujet 1 - 19 Juin 2024

Mathovore.fr

Remarque

Dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.

BARÈME (sur 20 points)			
Exercice 1	:	Vrai/Faux	4 points
Exercice 2	:	Probabilités, variables aléatoires	5 points
Exercice 3	:	Espace	5 points
Exercice 4	:	Fonctions et intégration	6 points

Exercice 1. Vrai/Faux — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Affirmation 1 :

L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f.

Corrigé (Vraie)

Une asymptote horizontale à la courbe C_f signifierait que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Analysons cette limite :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 5xe^{-x}.$$

Pour évaluer cette limite, on utilise le fait que e^{-x} décroît beaucoup plus rapidement que x croît. Ainsi d'après les croissances comparées :

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- (1) limites usuelles :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0 \end{cases}$$

- (2) (nombre dérivé en 0) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x} - 1}{x} = 1$$

- (3) croissances comparées pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^n} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^{x} = 0 \end{cases}$$

Donc,

$$\lim_{x\to+\infty} 5xe^{-x} = \lim_{X\to-\infty} -5Xe^{X} = 0.$$

Donc l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f en $+\infty$.
Par contre ce n'est pas le cas en $-\infty$ car :

$$\lim_{x\to-\infty} 5xe^{-x} = \lim_{X\to+\infty} -5Xe^{X} = -\infty.$$

Affirmation 2 :

La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 5\mathrm{e}^{-x}$.

Corrigé (Vrai)

Pour vérifier que $f(x) = 5xe^{-x}$ est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 5e^{-x}$, calculons la dérivée de $f(x)$:

$$f'(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} = 5e^{-x}(1-x).$$

Maintenant, vérifions si $f(x)$ satisfait l'équation (E) :

$$f'(x) + f(x) = 5e^{-x}(1-x) + 5xe^{-x} = 5e^{-x}.$$

Ainsi, $f(x)$ vérifie bien l'équation (E) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. On considère les suites (u_n) , (v_n) et (w_n), telles que, pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1 .

Affirmation 3 :

La suite (v_n) converge vers un nombre réel l appartenant à l'intervalle $[-1; 1]$.

Corrigé (Faux)

Soit les suites définies par :

$$u_n = -1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \cos n \quad \text{et} \quad w_n = 1 + \frac{1}{n}$$

ces 3 suites vérifient bien les données de la question :

- pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$;
- la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1 .

et pourtant la suite (v_n) n'est pas convergente.

On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.

Affirmation 4 :

Pour tout entier naturel n, on a alors : $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

Corrigé (Vrai)

Comme (u_n) est croissante et (w_n) est décroissante, il en découle que pour tout n,

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_0.$$

En particulier, pour tout entier n :

$$u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$$

Exercice 2. Probabilités, variables aléatoires — 5 points

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.
Les achats sur internet représentent 60% des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30% des ventes et ceux en grandes surfaces 10% des ventes.
Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75% pour les clients sur internet ;
- 90% pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80% pour les clients en grande surface.

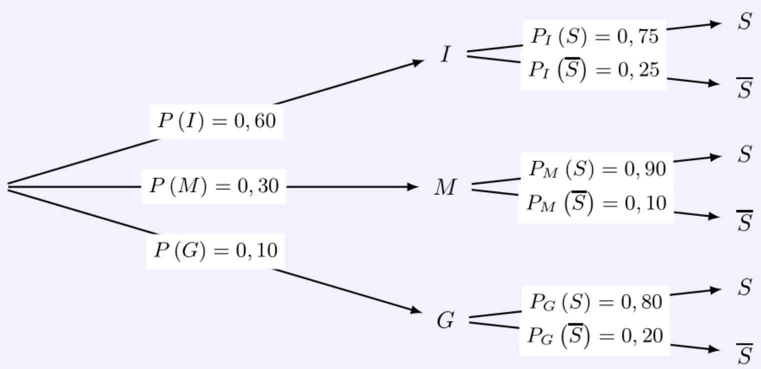
On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.
On définit les événements suivants :

- I : «le client a effectué son achat sur internet» ;
- M : «le client a effectué son achat en magasin d'électroménager» ;
- G : : le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle».

Si A est un événement quelconque, on notera $\bar{A}$ son événement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.

Corrigé



2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.

Corrigé

La probabilité cherchée est :

$$P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S) = 0,6 \times 0,75 = \underline{0,45}$$

3. Démontrer que $P(S) = 0,8$.

Corrigé
Les évènement I, M et G forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S)$$

$$P(S) = 0,45 + 0,27 + 0,08 = \underline{0,80}$$

4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.

Corrigé

$$P_S(S) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0,45}{0,80} = 0,5625 \approx \underline{0,563}$$

5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.

5. a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Corrigé
Modélisation
Il y a répétition de $n = 30$ événements indépendants et identiques (on tire un client).
Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité $p = 0,8$ quand un client est satisfait ;
- et échec de probabilité $1 - p = 0{,}2$ sinon.

Donc la variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 30$ épreuves *indépendantes* de *Bernoulli* de paramètre $p = 0,8$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n = 30$ et $p = 0,8$.
On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathcal{B}\left(30\ ;\ 0,8\right) \text{ ou } X \sim \mathcal{B}\left(30\ ;\ 0,8\right).$$

Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 30$ et $p = 0,8$ on a :

$$\boxed{P\left(X = k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{30}{k} \times 0,8^k \times (0{,}2)^{30-k}}$$

5. b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

Corrigé
On cherche :

$$P(X \geqslant 25) = 1 - P(X < 25) \approx \underline{0,427}$$

6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99 .

Corrigé

La probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait est égale à 1 moins la probabilité que tous soient satisfaits. On a :

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\binom{n}{k}\times 0,8^k\times(0{,}2)^{n-k}}$$

$$\begin{aligned}1-P(X=n)\geqslant 0,99 &\iff 1-0,8^n\geqslant 0,99\\ &\iff 0,8^n\leqslant 0,01\\ &\iff \ln\left(0,8^n\right)\leqslant \ln 0,01\\ &\iff n\ln(0,8)\leqslant \ln 0,01\end{aligned}$$

et puisque $\ln(0,8)<0$ on a :

$$\iff n\geqslant \frac{\ln 0,01}{\ln(0,8)}\approx 20,6$$

Donc, il faut contacter au moins 21 clients pour avoir une probabilité supérieure à 0,99 qu'au moins un client ne soit pas satisfait.

7. Dans les deux questions a. et b. qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.

Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2.

La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :

- L'espérance $E(T_1)=4$ et la variance $V(T_1)=2$;
- L'espérance $E(T_2)=3$ et la variance $V(T_2)=1$.

7. a. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.

Corrigé

- Par linéarité de l'espérance :

$$E(T)=E(T_1+T_2)=E(T_1)+E(T_2)=4+3=\underline{7\text{ jours}}$$

- Pour la variance, on admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes donc :

$$V(T)=V(T_1+T_2)=V(T_1)+V(T_2)=2+1=\underline{3}$$

7. b. Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

Corrigé

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.
Alors, pour tout réel a strictement positif,

$$P\left(|X - E(X)| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(X)}{a^2} \iff P\left(|X - E(X)| < a\right) \geqslant 1 - \frac{V(X)}{a^2}$$

Cette inégalité est appelée l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

On cherche $P(5 \leqslant T \leqslant 9)$ et on sait que $E(T) = 7$ et $V(T) = 3$:

$$\begin{aligned} P(5 \leqslant T \leqslant 9) &= P(4 < T < 10) \\ &= P(7 - 3 < T < 7 + 3) \\ &= P(E(T) - 3 < T < E(T) + 3) \\ &= P(-3 < T - E(T) < +3) \\ &= P(|T - E(T)| < 3) \end{aligned}$$

On applique alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $a = 3$ et $V(X) = 3$:

$$= P(|T - E(T)| < 3) \geqslant 1 - \frac{3}{3^2}$$

$$\boxed{P(5 \leqslant T \leqslant 9) = P(|T - E(T)| < 3) \geqslant \frac{2}{3}}$$

Exercice 3. Espace — 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(5~;~5~;~0)$; $B(0~;~5~;~0)$; $C(0~;~0~;~10)$ et $D\left(0~;~0~;~-\frac{5}{2}\right)$.

1.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

Corrigé

- On a $\overrightarrow{n_1}$ orthogonal à $\overrightarrow{AD}$ car :

$$\begin{cases}D\left(0~;~0~;~-\frac{5}{2}\right)\\A(5~;~5~;~0)\end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-5\\-5\\-\dfrac{5}{2}\end{pmatrix}.\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = -5+5+0=0$$

- On a $\overrightarrow{n_1}$ orthogonal à $\overrightarrow{AC}$ car :

$$\begin{cases}C(0~;~0~;~10)\\A(5~;~5~;~0)\end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-5\\10\end{pmatrix}.\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = -5+5+0=0$$

- Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont clairement pas colinéaires.
- Donc le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD), il est donc normal à ce plan.

1. b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x-y=0$.

Corrigé

Propriété 2

Soit vecteur $\vec{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}~.~\vec{u}~=0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}.~\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \Longleftrightarrow a\,(x-x_A)+b\,(y-y_A)+c\,(z-z_A)=0$$

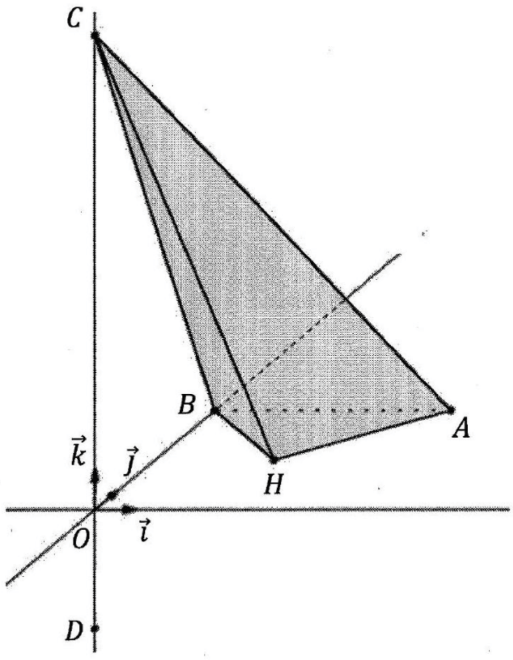
Donc d'après la propriété 2 :

$$M(x~;~y~;~z)\in(CAD) \Longleftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-10\end{pmatrix}.~\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=0$$

$$M(x~;~y~;~z)\in(CAD) \Longleftrightarrow x-y+0$$

$$\boxed{(CAD)~~:~~x-y=0}$$

2. On considère la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.



2. a. On admet que la droite $\mathcal{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$.

Corrigé

Le point H est l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (CAD). En substituant les paramètres de la droite dans l'équation du plan, on obtient :

$$\frac{5}{2}t - \left(5 - \frac{5}{2}t\right) = 0.$$

Ce qui donne $t = 1$. Donc les coordonnées de H sont $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$.

2. b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

Corrigé

- La droite $\mathcal{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H et son équation est :

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

- Le point $B(0\ ;\ 5\ ;\ 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ puisque pour $t = 0$ on retrouve bien les coordonnées de B.

- On a les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{n_1}$ colinéaires : :

$$\begin{cases} B(0\ ;\ 5\ ;\ 0) \\ H\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right) \end{cases} \implies \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{BH} = \frac{5}{2}\overrightarrow{n_1}$$

- Donc H est bien le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

3.

3. a. Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

Corrigé

$$\begin{cases} A(5\ ;\ 5\ ;\ 0) \\ B(0\ ;\ 5\ ;\ 0) \\ H\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right) \end{cases} \implies \overrightarrow{HA}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} . \overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux car leur produit scalaire vaut 0.

Donc le triangle ABH est rectangle en H.

3. b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.

Corrigé

L'aire du triangle ABH est donnée par :

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \times AB \times AH = \frac{1}{2} \times \left|\overrightarrow{AB}\right| \times \left|\overrightarrow{AH}\right| = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{5}{2} = \frac{25}{4}.$$

4.

4. a. Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C.

Corrigé

La droite (CO) est perpendiculaire au plan (ABH) car ce dernier est identique au plan (Oxy), les cotes des points A, B et H étant nulles.

C'est donc c'est la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C.

4. b. En déduire le volume du tétraèdre $ABCH$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Corrigé

Le volume du tétraèdre $ABCH$ est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire base } \times \text{ Hauteur } = \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10 = \frac{250}{12} = \frac{125}{6}.$$

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

Corrigé

- Soit (SH) est la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de A.
- On a donc aussi puisque le triangle ABC est rectangle en B :

$$V = \frac{Aire(ABC) \times SH}{3} \iff \frac{125}{6} = \frac{SH \times \frac{BA \times BC}{2}}{3}$$

Soit

$$\frac{125}{6} = \frac{SH \times \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2}}{3}$$

d'où

$$\boxed{SH = \sqrt{5}}$$

Exercice 4. Fonctions et intégration — 6 points

Partie A : étude de la fonction f.

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1.

1. a. Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Corrigé

Propriété 3 (Limites liées à la fonction logarithme)

- (1) limites usuelles :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

- (2) croissances comparées :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \end{cases}$$

- (3) (nombre dérivé en 1) :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

- on a par somme de limites :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0} (x-2) = -2 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\ln x = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$$

- on a par somme de limites :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x-2) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln x = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

1. b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty\,[$, on a : $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.

Corrigé

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ Pour tout réel $x > 0$ on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2x}$$
$$\boxed{f'(x) = \frac{2x+1}{2x}}$$

1. c. Étudier le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.

Corrigé

Pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty\,[$, on a :

$$\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. d. Étudier la convexité de f sur $]0;+\infty[$.

Corrigé

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ Pour tout réel $x>0$ on a :

$$f''(x) = -\frac{1}{2x^2} < 0$$

f est donc concave sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2.

2. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1;2]$.

Corrigé

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

***Remarque** : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- Application du corollaire sur $]0\ ;\ +\infty[$:
  - La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$;
  - Le réel $k=0$ est compris entre $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
- Encadrement de α :

$$\begin{cases} f(1) = 1-2 = -1 < 0 \\ f(2) = \dfrac{\ln 2}{2} > 0 \end{cases} \implies \boxed{1<\alpha<2}$$

2. b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x\in]0;+\infty[$.

Corrigé

On a donc :

x	0	1	α	2	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	-1	0	$\dfrac{\ln 2}{2}$	$+\infty$

Donc f négative sur $]0\ ;\ \alpha[$ et positive sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$ et nulle en α.

2. c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Corrigé

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\Longleftrightarrow \alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 2 - \alpha \\ &\Longleftrightarrow \boxed{\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)} \end{aligned}$$

Partie B : étude de la fonction g.

La fonction g est définie sur $]0;1]$ par $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0;1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

Corrigé

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;1]$ et on note g' sa fonction dérivée.
Pour tout réel x de $]0;1]$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}(2x\ln(x) + x) \\ &= -\frac{7}{4}x + 1 + \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x \\ &= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) \\ &= x\left(\frac{1}{x} + 2 - \frac{1}{2}\ln(x)\right) \\ &= x\left(\frac{1}{x} + 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)}$$

2.

2. a. Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $]0;\frac{1}{\alpha}[$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

Corrigé

Pour x appartenant à l'intervalle $]0;\frac{1}{\alpha}[$, on a $\dfrac{1}{x} > \alpha$ et donc puisque f croissante sur cet intervalle :

$$\boxed{f\left(\frac{1}{x}\right) > f(\alpha) = 0}$$

2. b. On admet le tableau de signes suivant :

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	+	0	-

En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0;1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Corrigé

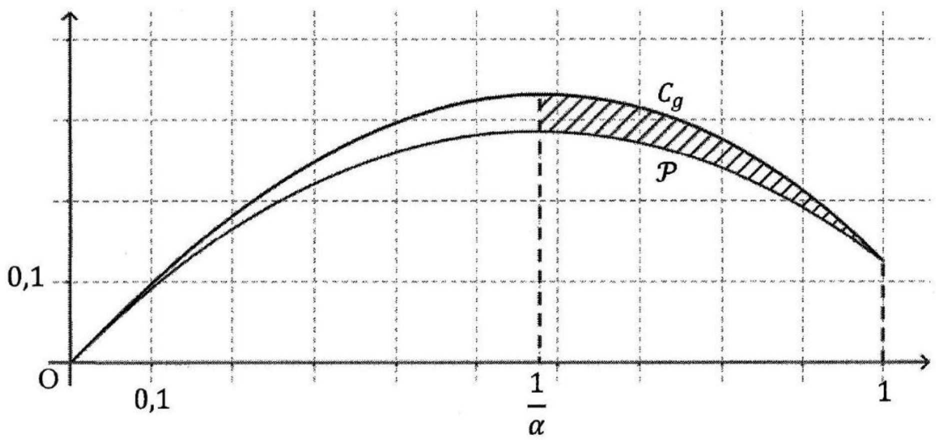
On a montré que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ donc g' est du signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0;1]$.

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g		$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$\searrow$	

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g ;
- La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0;1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes C_g et $\mathcal{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.
On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

1.

1. a. Justifier la position relative des courbes C_g et $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $]0;1]$.

Corrigé

Pour tout x de l'intervalle $]0;1]$.

$$\begin{aligned} g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) &= -\frac{1}{4}x^2\ln(x) \\ &\geqslant 0 \quad \text{car } x \in]0;1] \end{aligned}$$

La courbe $\mathscr{C}_g$ est donc au-dessus de la parabole $\mathcal{P}$.

1. b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

Corrigé

Intégrons par parties avec $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln x$ on a :

$$\int_a^b (u'v)(x)\mathrm{d}x = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b (uv')(x)dx$$

soit

$$\begin{aligned} \int_{1/\alpha}^{1} x^2\ln(x)\mathrm{dx} &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{1/\alpha}^{1} - \frac{1}{3}\int_{1/\alpha}^{1} x^3 \times \frac{1}{x}\mathrm{dx} \\ &= -\frac{1}{3\alpha^3}\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{3}\int_{1/\alpha}^{1} x^2\mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{3\alpha^3}\ln(\alpha) - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{1/\alpha}^{1} \\ &= \frac{1}{3\alpha^3} \times 2(2-\alpha) - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{\alpha^3}\right) \\ &= \frac{4}{3\alpha^3} - \frac{2}{3\alpha^2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{1/\alpha}^{1} x^2\ln(x)\mathrm{dx} = \frac{13 - 6\alpha - \alpha^3}{9\alpha^3}}$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathcal{A}$.

Corrigé

Puisque la courbe $\mathscr{C}_g$ est donc au-dessus de la parabole $\mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{1/\alpha}^{1} g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) \mathrm{dx} \\
&= \int_{1/\alpha}^{1} -\frac{1}{4}x^2 \ln(x) \mathrm{dx} \\
&= -\frac{1}{4}\int_{1/\alpha}^{1} x^2 \ln(x) \mathrm{dx} \\
&\boxed{\mathcal{A} = -\frac{1}{4} \times \frac{13 - 6\alpha - \alpha^3}{9\alpha^3}}
\end{aligned}$$

Fin du devoir