∽ Corrigé du baccalauréat Métropole et La Réunion ∾

Sujet 2 – 12 septembre 2023

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

La paratuberculose est une maladie digestive infectieuse qui touche les vaches. Elle est due à la présence d'une bactérie dans l'intestin de la vache. On réalise une étude dans une région dont 0,4 % de la population de vaches est infectée. Il existe un test qui met en évidence la réaction immunitaire de l'organisme infecté par la bactérie. Le résultat de ce test peut être soit « positif », soit « négatif ». On choisit une vache au hasard dans la région.
Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- Si la vache est atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit positif est de 0,992 ;
- Si la vache n'est pas atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit négatif est de 0,984.

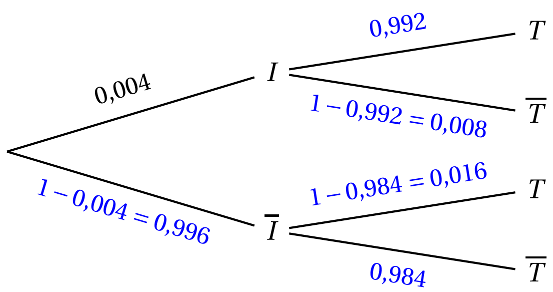
On désigne par :

- I l'évènement « la vache est atteinte par l'infection » ;
- T l'évènement « la vache présente un test positif ».

On note $\overline{I}$ l'évènement contraire de I et $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

Partie A

1. On complète l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



2. **a.** La probabilité que la vache ne soit pas atteinte par l'infection et que son test soit négatif est : $P\left(\overline{I}\cap\overline{T}\right)=0{,}996\times 0{,}984\approx 0{,}980$.

   b. La probabilité que la vache présente un test positif est $P(T)$.

   D'après la formule des probabilités totales :

   $P(T)=P(I\cap T)+P\left(\overline{I}\cap T\right)=0{,}004\times 0{,}992+0{,}996\times 0{,}016=0{,}019904$ soit $0{,}020$ à 10^{-3} près,

   c. La « valeur prédictive positive du test » est la probabilité que la vache soit atteinte par l'infection sachant que son test est positif, c'est-à-dire : $P_T(I)$.

   $P_T(I)=\dfrac{P(I\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0{,}004\times 0{,}992}{0{,}02}\approx 0{,}199$

   d. Le test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache lorsque la vache n'est pas infectée et présente un résultat positif au test, c'est-à-dire avec une probabilité de $P\left(\overline{I}\cap T\right)$, ou lorsque la vache est infectée et présente un résultat négatif au test, c'est-à-dire avec une probabilité de $P\left(I\cap\overline{T}\right)$.

   La probabilité que ce test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache est donc : $P\left(\overline{I}\cap T\right)+P\left(I\cap\overline{T}\right)=0{,}996\times 0{,}016+0{,}004\times 0{,}008\approx 0{,}160$.

Partie B

3. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.

a. L'expérience élémentaire consiste à savoir si, pour une vache donnée, le test est positif (avec une probabilité $p = 0{,}02$) ou non ; il n'y a donc que deux issues.

On exécute cette expérience élémentaire 100 fois pour extraire un échantillon de taille $n = 100$ en assimilant ce choix à un tirage avec remise.

La variable aléatoire X qui donne le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}02$.

b. La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif est : $P(X = 3) = \binom{100}{3} \times 0{,}02^3 \times (1 - 0{,}02)^{100-3} \approx 0{,}182$.

c. La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif est : $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}859$ (résultat donné par la calculatrice).

4. On choisit à présent un échantillon de n vaches dans cette région, n étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

La valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99 est telle que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$.

C'est-à-dire : $1 - P(X = 0) \geqslant 0{,}99$ ou encore : $0{,}01 \geqslant P(X = 0)$.

On résout l'inéquation : $P(X = 0) \leqslant 0{,}01$.

$P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0{,}02^0 \times (1 - 0{,}02)^{n-0} = 0{,}98^n$

$0{,}98^n \leqslant 0{,}01 \iff \ln\left(0{,}98^n\right) \leqslant \ln(0{,}01) \iff n \times \ln(0{,}98) \leqslant \ln(0{,}01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}98)}$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}98)} \approx 227{,}95$ donc il faut un échantillon d'au moins 228 vaches pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.

EXERCICE 2 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = (2 - \ln x) \times \ln x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

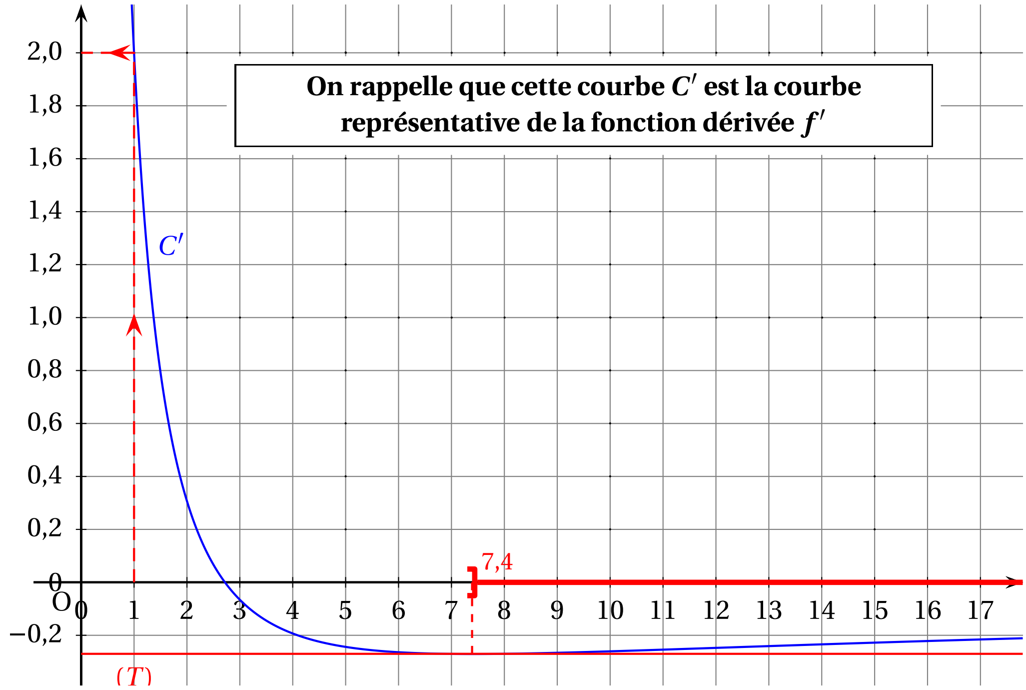
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0~;~+\infty[$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et C' la courbe représentative de la fonction f', fonction dérivée de la fonction f.

La **courbe C'** est donnée ci-dessous ainsi que son unique tangente horizontale (T).

1. a. Le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1 est $f'(1)$; graphiquement, c'est environ 2.

b. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est le plus grand intervalle sur lequel la fonction f' est croissante, soit $[7{,}4~;~+\infty[$.

2. a. $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2 - \ln x = -\infty\end{array}\right\} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2 - \ln x) \times \ln x = -\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.



b. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 2-\ln x = +\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 0}(2-\ln x)\times \ln x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

On en déduit que la courbe C admet la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale.

3. Les abscisses des points d'intersection de la courbe C et de l'axe des abscisses sont solutions de l'équation $f(x) = 0$; on résout cette équation.

$f(x) = 0 \iff (2-\ln x)\times \ln x = 0 \iff 2-\ln x = 0$ ou $\ln x = 0 \iff \ln x = 2$ ou $\ln x = 0$
$\iff x = \mathrm{e}^2$ ou $x = 1$

Les coordonnées des points d'intersection de la courbe C et de l'axe des abscisses sont donc $(1\ ;\ 0)$ et $(\mathrm{e}^2\ ;\ 0)$.

4. **a.** Pour tout réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$:

$$f'(x) = \left(0-\frac{1}{x}\right)\times \ln x + (2-\ln x)\times\frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x}+\frac{2-\ln x}{x} = \frac{2-2\ln x}{x} = \frac{2(1-\ln x)}{x}$$

b. $f'(x)$ s'annule et change de signe quand $1-\ln x = 0$, donc pour $x = \mathrm{e}$.

$f(\mathrm{e}) = (2-\ln \mathrm{e})\times \ln \mathrm{e} = (2-1)\times 1 = 1$

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0		e		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

5. On note f'' la dérivée seconde de f et on admet que sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2(\ln x-2)}{x^2}$.

La fonction f est convexe si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$; on résout cette inéquation.

$f''(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{2(\ln x - 2)}{x^2} \geqslant 0 \iff \ln x - 2 \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant 2 \iff x \geqslant \text{e}^2$

Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est donc $\left[\text{e}^2\,;\,+\infty\right[$.

$f''(x) = 0 \iff 2 - \ln x = 0 \iff x = \text{e}^2$ et $f\left(\text{e}^2\right) = \left(2 - \ln \text{e}^2\right) \times \ln \text{e}^2 = 0$

Donc la courbe C admet le point de coordonnées $\left(\text{e}^2\,;\,0\right)$ comme point d'inflexion.

Exercice 3 — 5 points

On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_1 = \dfrac{1}{\text{e}} \\ \text{pour tout entier } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{\text{e}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)u_n \end{array}\right.$

1.
- Pour $n = 1$: $u_2 = u_{1+1} = \dfrac{1}{\text{e}}\left(1 + \dfrac{1}{1}\right)u_1 = \dfrac{1}{\text{e}}(2)\dfrac{1}{\text{e}} = \dfrac{2}{\text{e}^2}$
- Pour $n = 2$: $u_3 = u_{2+1} = \dfrac{1}{\text{e}}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)u_2 = \dfrac{1}{\text{e}}\left(\dfrac{3}{2}\right)\dfrac{2}{\text{e}^2} = \dfrac{3}{\text{e}^3}$

2. On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel n donné, affiche le terme u_n. On complète les lignes L_2 et L_4 de ce programme.

L_1	`def suite(n):`
L_2	`    u = 1/e`
L_3	`    for i in range(1, n):`
L_4	`        u = 1/e*(1+1/i)*u`
L_5	`return u`

3. On admet que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

a. $n \geqslant 1 \implies \dfrac{1}{n} \leqslant 1 \implies 1 + \dfrac{1}{n} \leqslant 2$ donc $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant \text{e}$

b. $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant \text{e}$ donc $\dfrac{1}{\text{e}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leqslant 1$

Or pour tout n, $u_n > 0$, donc : $\dfrac{1}{\text{e}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)u_n \leqslant u_n$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_n$.

La suite (u_n) est décroissante.

c. Pour tout n, $u_n > 0$ donc la suite (u_n) est minorée par 0.

On a démontré que cette suite était décroissante donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

4. a. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n = \dfrac{n}{\text{e}^n}$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 1$: $u_1 = \dfrac{1}{\text{e}}$ et $\dfrac{n}{\text{e}^n} = \dfrac{1}{\text{e}}$

  Donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité**

  On suppose que la propriété est vraie au rang $n \geqslant 1$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $u_{n+1} = \dfrac{1}{\text{e}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)u_n = \dfrac{1}{\text{e}}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\dfrac{n}{\text{e}^n} = \dfrac{n+1}{\text{e}^{n+1}}$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 1, elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{n}{\text{e}^n}$.

b. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\mathrm{e}^n} = 0$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 4 — 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

On considère :

- les points A$(-1\,;\,-2\,;\,3)$, B$(1\,;\,-2\,;\,7)$ et C$(1\,;\,0\,;\,2)$;
- la droite Δ de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = -4 + 3t \end{array}\right.$, où $t \in \mathbb{R}$;
- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $3x + 2y + z - 4 = 0$;
- le plan $\mathscr{Q}$ d'équation cartésienne : $-6x - 4y - 2z + 7 = 0$.

1. Lequel des points suivants appartient au plan $\mathscr{P}$?

a. $R(1\,;\,-3\,;\,1)$; **b.** $S(1\,;\,2\,;\,-1)$; **c.** $T(1\,;\,0\,;\,1)$; **d.** $U(2\,;\,-1\,;\,1)$.

$3x_{\mathrm{T}} + 2y_{\mathrm{T}} + z_{\mathrm{T}} - 4 = 3 + 0 + 1 - 4 = 0$ donc T $\in \mathscr{P}$ **Réponse c.**

2. Le triangle ABC est :

a. équilatéral ; **b.** rectangle isocèle ;
c. isocèle non rectangle ; **d.** rectangle non isocèle.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ont respectivement pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.
Donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2 \times 2 + 0 \times 2 + 4 \times (-1) = 0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ donc ABC est rectangle en A.
$\mathrm{AB}^2 = 2^2 + 0^2 + 4^2 = 20$ et $\mathrm{AC}^2 = 2^2 + 2^2 + (-1)^2 = 9$, donc AB $\neq$ AC
Le triangle ABC n'est pas isocèle. **Réponse d.**

3. La droite Δ est :

a. orthogonale au plan $\mathscr{P}$; **b.** sécante au plan $\mathscr{P}$;
c. incluse dans le plan $\mathscr{P}$; **d.** strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.

La droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$, et le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.
$\vec{v} \cdot \vec{n} = -1 \times 3 + 0 \times 2 + 3 \times 1 = 0$ donc $\vec{v} \perp \vec{n}$, et donc Δ est parallèle à $\mathscr{P}$.
Le point H de coordonnées $(1\,;\,2\,;\,-4)$ appartient à Δ.
$3x_{\mathrm{H}} + 2y_{\mathrm{H}} + z_{\mathrm{H}} - 4 = 3 \times 1 + 2 \times 2 - 4 - 4 = -1 \neq 0$ donc H $\notin \mathscr{P}$.
La droite Δ n'est pas incluse dans le plan $\mathscr{P}$. **Réponse d.**

4. On donne le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 20$.

Une mesure au degré près de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ est :

a. 34° ; **b.** 120° ; **c.** 90° ; **d.** 0°.

Le triangle ABC est rectangle en A donc l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ est un angle aigu. **Réponse a.**

5. L'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est :

a. un plan ; **b.** l'ensemble vide ;

c. une droite ; **d.** réduite à un point.

Le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ et le plan $\mathscr{Q}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-6\\-4\\-2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{n'} = -2\overrightarrow{n}$ donc les plans sont parallèles.

Le point T appartient à $\mathscr{P}$.

$-6x_{\text{T}} - 4y_{\text{T}} - 2z_{\text{T}} + 7 = -6 \times 1 - 4 \times 0 - 2 \times 1 + 7 = -1 \neq 0$ donc $\text{T} \notin \mathscr{Q}$

Les deux plans sont donc strictement parallèles. **Réponse b.**