Corrigé du bac de maths 2024 en Asie Pacifique – Sujet n° 2.

Mathovore.fr

Exercice 1

Partie A : Étude de la fonction f

1. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

   Pour tout réel $x > 0$ on a $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

   Par croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. La fonction f est dérivable sur $]0;\infty[$ par hypothèse.
   Pour tout réel $x > 0$ on a :
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \ln(x) - x \times \frac{1}{x} \\ &= 2x - \ln(x) - 1 \end{aligned}$$

3. La fonction f' est dérivable sur $]0;\infty[$ par hypothèse.
   Pour tout réel $x > 0$ on a :
   $$\begin{aligned} f''(x) &= 2 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x-1}{x} \end{aligned}$$

4. Le signe de $f''(x)$ ne dépend que de celui de $2x - 1$.
   Or $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ et $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$
   La fonction f' est donc strictement décroissante sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.
   De plus
   $$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \times \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \\ &= 1 + \ln(2) - 1 \\ &= \ln(2) \\ &> 0 \end{aligned}$$
   On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f'	$\|$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	

5. La fonction f' admet donc un minimum en $\dfrac{1}{2}$ qui vaut $\ln(2) > 0$.
   Par conséquent, pour tout réel $x > 0$ on a $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

1. La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ par hypothèse.
   Pour tout réel $x > 0$ on a :
   $$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$
   Le signe de $g'(x)$ ne dépend que de celui de $x - 1$.
   $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
   On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
g	$\|\|$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. Soit $x>0$.

$$\begin{aligned} f(x)=x &\Leftrightarrow x^2-x\ln(x)=x \\ &\Leftrightarrow x^2-x\ln(x)-x=0 \\ &\Leftrightarrow x\,(x-\ln(x)-1)=0 \\ &\Leftrightarrow x\,(g(x)-1)=0 \\ &\Leftrightarrow g(x)=1 \qquad \text{car } x>0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation $f(x)=x$ sur $]0;+\infty[$ est 1.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

1. Pour tout entier naturel n on pose $P(n)$: $\dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

Initialisation :

$$\begin{aligned} u_1 &= f\left(u_0\right) \\ &= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}+\frac{\ln(2)}{2} \\ &\approx 0,597 \end{aligned}$$

Par conséquent $\dfrac{1}{2}\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 1$ et $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel. On suppose que $P(n)$ est vraie.

Ainsi $\dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

La fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Par conséquent $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqslant f\left(u_n\right)\leqslant f\left(u_{n+1}\right)\leqslant f(1)$

Soit $u_1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 1$ car pour tout entier naturel k on a $u_{k+1}=f\left(u_k\right)$.

Ainsi $\dfrac{1}{2}\leqslant u_1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 1$ et $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n on a
$\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

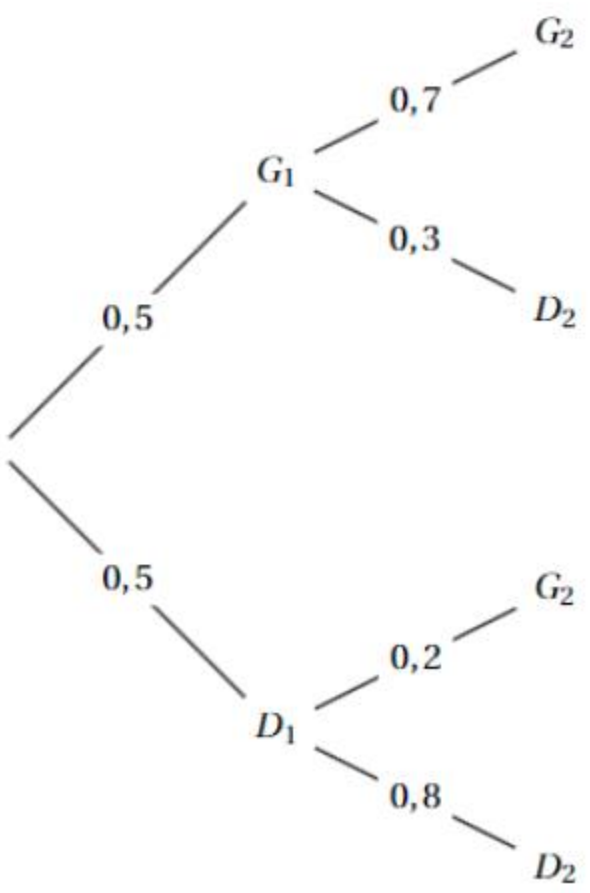
2. La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) onverge vers un réel ℓ.

3. ℓ est solution de l'équation $f(x)=x$.
   D'après la question **B.2** l'unique solution de cette équation est 1.
   Ainsi $\ell = 1$.

Exercice 2

1. D'après l'énoncé :
$$\begin{aligned} P_{G_1}(D_2) &= 1 - P_{G_1}(G_2) \\ &= 1 - 0,7 \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

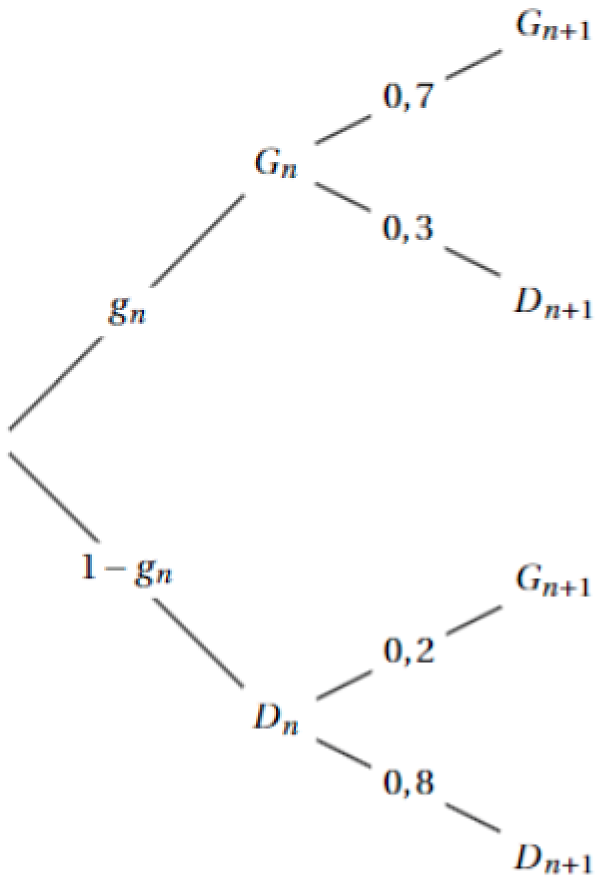
2. On obtient l'arbre des probabilités suivant :



3. (G_1, D_1) forme un système complet d'événements fini.
D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
g_2 &= P(G_2) \\
&= P(G_1 \cap G_2) + P(D_1 \cap G_2) \\
&= P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(D_1) \times P_{D_1}(G_2) \\
&= 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 \\
&= 0,45
\end{aligned}$$

4. **a.** On obtient l'arbre des probabilités suivant :



b. Pour tout entier naturel n non nul, (G_n, D_n) est un système complet d'événements fini.
D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
g_{n+1} &= P(G_{n+1}) \\
&= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(D_n \cap G_{n+1}) \\
&= P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(G_{n+1}) \\
&= 0,7g_n + 0,2(1 - g_n) \\
&= 0,7g_n + 0,2 - 0,2g_n \\
&= 0,5g_n + 0,2
\end{aligned}$$

5. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= g_{n+1} - 0,4 \\
&= 0,5g_n + 0,2 - 0,4 \\
&= 0,5g_n - 0,2 \\
&= 0,5(g_n - 0,4) \\
&= 0,5v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $0,5$ et de premier terme $v_1 = 0,5 - 0,4 = 0,1$.

b. Pour tout entier naturel n non nul on a donc $v_n = 0,1 \times 0,5^{n-1}$.
Or $g_n = v_n + 0,4$.
Donc $g_n = 0,1 \times 0n5^{n-1} + 0,4$.

6. Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
g_{n+1} - g_n &= 0,1 \times 0,5^n + 0,4 - \left(0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4\right) \\
&= 0,1 \times 0,5^n - 0,1 \times 0,5^{n-1} \\
&= 0,1 \times 0,5^{n-1}(0,5 - 1) \\
&= -0,1 \times 0,5^n \\
&< 0
\end{aligned}$$

La suite (g_n) est donc décroissante.

7. On a $-1 < 0,5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$.
Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = 0,4$.
Sur le long terme, la probabilité que Léa gagne une partie est égale à $0,4$.

8. On veut déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que :

$$\begin{aligned} g_n - 0,4 \leqslant 0,001 &\Leftrightarrow 0,1 \times 0,5^{n-1} \leqslant 0,001 \\ &\Leftrightarrow 0,5^{n-1} \leqslant 0,01 \\ &\Leftrightarrow (n-1)\ln(0,5) \leqslant \ln(0,01) \qquad \text{croissance de la fonction } \ln \\ &\Leftrightarrow n-1 \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \qquad \text{car } \ln(0,5) < 0 \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 1 + \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \end{aligned}$$

Or $1 + \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \approx 7,6$.

Le plus petit entier naturel n tel que $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$ est donc 8.

9. On peut écrire :

```python
2   g = 0.5
3   n = 1
4   while g > 0.4 + e :
5     g = 0.5 * g + 0.2
6     n = n + 1
7   return(n)
```

Remarque : il manquait un $*$ à la ligne 5 !

Exercice 3

1. Pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{aligned}\frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} &= \frac{n^2\left(3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(6+\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \frac{3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}{6+\frac{1}{n^2}}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \frac{1}{2}$

De plus, pour tout entier naturel n on a $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

L'affirmation 1 est vraie.

2. D'après le graphique, h' semble être décroissante sur $[1,25;3]$.
La fonction h est donc concave sur cet intervalle.
Or $[1,25;3]$ est inclus dans $[-1;3]$.
L'affirmation 2 est fausse.

3. Pour le choix des lettres il y a 3 choix possibles pour la première et 2 choix possibles pour la seconde.
Il existe $10^4 \times 3 \times 2 = 60\ 000$ combinaisons possibles (il y a 10 chiffres possibles).
Il existe $9^4 \times 3 \times 2 = 39\ 366$ combinaisons ne contenant pas de 0 (il y a 9 chiffres différents de 0 possibles).
Il y a donc $60\ 000 - 39\ 366 = 20\ 634$ combinaisons qui contiennent au moins un 0.
L'affirmation 3 est vraie.

4. La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.
Pour tout réel $x>0$ on a :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln(x)+1\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}xf'(x)-f(x) &= x\left(\ln(x)+1\right) - x\ln(x) \\ &= x\ln(x)+x-x\ln(x) \\ &= x\end{aligned}$$

f est bien une solution de l'équation différentielle $xy'-y=x$ sur $]0;+\infty[$.
L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 4

Partie A

1. $2+0-3+1=3-3=0$: A appartient au plan (P).
   $4-2-3+1=5-5=0$: B appartient au plan (P).
   $-8-12-15+1=1-35=-34\neq 0$: C n'appartient pas au plan (P).

2. Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix}=2\vec{n}$

   Ainsi $\overrightarrow{CC'}$ est normal au plan (P).
   De plus $0-4+3+1=4-4=0$: C' appartient au plan (P).
   $C'(0;-2;-1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).

3. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

   Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc $\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=1\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

4. On note $(x;y;z)$ les coordonnées de H.

   H appartient à (AB). Il existe donc un réel t tel que $\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=1\end{cases}$.

   $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-4-x\\-6-y\\5-z\end{pmatrix}$.

   (AB) et (HC) sont orthogonales. Donc :

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0 &\Leftrightarrow (-4-x)-(-6-y)=0\\ &\Leftrightarrow -4-x+6+y=0\\ &\Leftrightarrow x-y=2\end{aligned}$$

On veut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x=1+t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+t+t=2 \\ x=1+t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t=1 \\ x=1+t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \\ z=1 \end{cases}$$

Ainsi les coordonnées possibles pour H sont $\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Vérifions que ces coordonnées sont bien les bonnes.

En prenant $t=\dfrac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de (AB) on retrouve les coordonnées $\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Si $H\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2};1\right)$ alors $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix} -\dfrac{11}{2} \\ -\dfrac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=-\dfrac{11}{2}+\dfrac{11}{2}+0=0$. (AB) et (HC) sont orthogonales.

Le points H pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Partie B

1. On a :
$$\left\|\overrightarrow{HC}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right)^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{121}{4} + 16}$$
$$= \sqrt{\frac{153}{2}}$$

2. On a :
$$AB = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0}$$
$$= \sqrt{2}$$
Par conséquent :
$$S = \frac{AB \times HC}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{153}{2}}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{153}}{2}$$

Partie C

1. $\overrightarrow{CC'}$ est orthogonal au plan (P) et les points C' et H appartiennent à ce plan.
Donc CHC' est un triangle rectangle en C'.
Ainsi :
$$\cos(\alpha) = \frac{HC'}{CH}$$
$$= \frac{\sqrt{\frac{17}{2}}}{\frac{\sqrt{153}}{2}}$$
$$= \frac{1}{3}$$

2. **a.** On a $\overrightarrow{C'H}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 2\end{pmatrix}$.

Par conséquent $\overrightarrow{C'H}.\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 0 = 0$.
Les deux vecteurs sont orthogonaux par conséquent les droites sont orthogonales.
Elles appartiennent toutes les deux au plan (P).
Ainsi $(C'H)$ et (AB) sont perpendiculaires.

b. On a :

$$\begin{aligned} S' &= \frac{AB \times C'H}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{17}{2}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

c. On a :

$$\begin{aligned} S\cos(\alpha) &= \frac{\sqrt{153}}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{\sqrt{17}}{2} \\ &= S' \end{aligned}$$

Donc $S\cos(\alpha) = S'$.