Corrigé du baccalauréat Asie Pacifique 2024 – Epreuve n° 1.

Mathovore.fr

Exercice 1

Partie A

1. Graphiquement on obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$1{,}5$	5
f	$-5{,}2$ ↗	$2{,}4$	↘ $0{,}35$

2. Le point A semble être un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

3. La fonction f semble être croissante sur l'intervalle $[0;1,5]$ et décroissante sur $[1,5;+\infty[$. La courbe représentant la fonction f' doit donc être au-dessus de l'axe des abscisses sur $[0;1,5]$ et en dessous sur l'autre.
Ainsi, f' est représentée par la courbe $\mathscr{C}_2$ et f'' par la courbe $\mathcal{C}_1$.

4. La fonction f semble être négative sur l'intervalle $[0;0,5]$. Ses primitives sont donc décroissantes sur cet intervalle ; ce qui n'est pas le cas de la courbe $\mathscr{C}_3$.

Partie B

1. **a.** La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ par hypothèse.
   Pour tout réel $x \geqslant 0$ on a :
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 4\mathrm{e}^{-x+1} - (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1} \\ &= (4-4x+2)\mathrm{e}^{-x+1} \\ &= (6-4x)\mathrm{e}^{-x+1} \end{aligned}$$

   b. Pour tout réel t on a $\mathrm{e}^t > 0$ donc, pour tout réel $x \geqslant 0$ on a $\mathrm{e}^{-x+1} > 0$.
   Le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que de celui de $6-4x$.
   Or :
   $6-4x=0 \Leftrightarrow -4x=-6 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ et $6-4x>0 \Leftrightarrow -4x>-6 \Leftrightarrow x<\dfrac{3}{2}$
   On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-2\mathrm{e}$	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-1/2}$	$\searrow$	0

c. La fonction f' est dérivable sur $[0; +\infty[$ par hypothèse.
Pour tout réel $x \geqslant 0$ on a :
$$\begin{aligned} f''(x) &= -4\mathrm{e}^{-x+1} - (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1} \\ &= (-4+4x-6)\mathrm{e}^{-x+1} \\ &= (4x-10)\mathrm{e}^{-x+1} \end{aligned}$$
La fonction exponentielle étant strictement positive, le signe de $f''(x)$ ne dépend que de celui de $4x-10$.
Or $4x-10=0 \Leftrightarrow 4x=10 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$ et $4x-10>0 \Leftrightarrow 4x>10 \Leftrightarrow x>\dfrac{5}{2}$
La fonction f est donc convexe sur $\left[0; \dfrac{5}{2}\right]$ et concave sur $\left[\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$.
La fonction f'' s'annule en changeant de signe en $\dfrac{5}{2}$.
Par conséquent, la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion au point d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.

2. **a.** La fonction F est dérivable sur $[0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.
Pour tout réel $x \geqslant 0$ on a :
$$\begin{aligned} F'(x) &= a\mathrm{e}^{-x+1} - (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1} \\ &= (-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x+1} \end{aligned}$$
Pour que F soit une primitive de f sur $[0;+\infty[$, il faut que, pour tout réel $x \geqslant 0$ on ait $F'(x) = f(x)$.
Par identification on a donc :
$$\begin{cases} -a = 4 \\ a - b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \end{cases}$$

b.
$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\mathrm{d}x \\ &= F(8) - F\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= -34\mathrm{e}^{-7} + 8\mathrm{e}^{-1/2} \end{aligned}$$

3. **a.** L'ordonnée du point D est :
$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= 4\mathrm{e}^{-1/2} \\ &\approx 2,43 \text{ m} \end{aligned}$$

b. La fonction f est continue (car dérivable) et positive sur $\left[\frac{3}{2};8\right]$.
Par conséquent l'aire du mur est égale à I.
L'artiste couvrira donc $\frac{75}{100}\left(-34\mathrm{e}^{-7} + 8\mathrm{e}^{-1/2}\right)$ m^2.
Or $\frac{75}{100}\left(-34\mathrm{e}^{-7} + 8\mathrm{e}^{-1/2}\right) \approx 3,62$ et $\begin{cases} 4 \times 0,8 = 3,2 \\ 5 \times 0,8 = 4 \end{cases}$.
Elle devra donc utiliser 5 bombes aérosol.

Exercice 2

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$

   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car ils n'ont pas la même composante nulle.
   A, B et C ne sont donc pas alignés.

2. **a.** On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$

   Ainsi $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}=4\overrightarrow{AB}$.

   Donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AB}$.
   Les points A, B, C et D sont complaires.

   b. On a $\overrightarrow{DC}\begin{matrix}4\\0\\-4\end{matrix}=4\overrightarrow{AB}$.

   Par conséquent (DC) et (AB) sont parallèles et $ABDC$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.

3. **a.** D'une part $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2+0-2=0$.

   D'autre part $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=-6+4+2=0$.
   $\vec{n}$ est orthogonal a deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).
   $\vec{n}$ est donc un vecteur normal au plan (ABC).

   b. Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $2x+y+2z+d=0$.
   Or $A(3;-1;1)$ appartient au plan (ABC) donc :
   $6-1+2+d=0 \Leftrightarrow d=-7$.
   Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $2x+y+2z-7=0$.

   c. Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc $\begin{cases}x=2+2t\\y=1+t\\z=4+2t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

d. Si on prend $t=-\dfrac{2}{3}$ dans la représentation paramétrique de Δ $\Big($c'est la valeur qui permet d'avoir $y=\dfrac{1}{3}\Big)$ on obtient alors $\begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \\ z=\dfrac{8}{3} \end{cases}$.

Le point de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{8}{3}\right)$ appartient à Δ.

De plus :

$2\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{8}{3}-7=\dfrac{21}{3}-7=0$.

Le point de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{8}{3}\right)$ appartient à (ABC).

La droite Δ et le plan (ABC) sont sécants.

Leur point d'intersection a bien pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{8}{3}\right)$.

On a $\overrightarrow{SI}\begin{pmatrix} -\dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} SI &= \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{36}{9}} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2\text{ cm} \end{aligned}$$

4. **a.** On appelle H' le point de coordonnées $(3;3;-1)$.

On a alors $\overrightarrow{BH'}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH'}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{BH'}.\overrightarrow{CD}=-4+0+4=0$: $\overrightarrow{BH'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CD}$

et $\overrightarrow{CH'}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{CD}$. : le point H' appartient à (CD).

Le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées $(3;3;-1)$.

De plus :

$$\begin{aligned}BH&=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2}\\&=\sqrt{1+16+1}\\&=\sqrt{18}\\&=\sqrt{9\times 2}\\&=3\sqrt{2}\text{ cm}\end{aligned}$$

b. On a :

$$\begin{aligned}b&=AB\\&=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\\&=\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=CD\\&=\sqrt{4^2+0^2+(-4)^2}\\&=\sqrt{32}\\&=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

De plus $h=HB$

L'aire du trapèze $ABDC$ est donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}&=\frac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2}\times 3\sqrt{2}\\&=\frac{5\sqrt{2}}{2}\times 3\sqrt{2}\\&=\frac{15\sqrt{2}^2}{2}\\&=15\text{ cm}^2\end{aligned}$$

5. Le volume de la pyramide $SABDC$ est :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \mathscr{A} \times SI \\ &= \frac{1}{3} \times 15 \times 2 \\ &= 10 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Exercice 3

Partie A

1. D'après l'énoncé la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 est $P(I) = 0,057$.

2. **a.** On répète 100 fois la même expérience de Bernoulli de paramètre $0,057$ de façon indépendante.
   X suit donc la loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,057$.

   b. Son espérance est :
   $$\begin{aligned} E(X) &= 100 \times 0,057 \\ &= 5,7 \end{aligned}$$
   En moyenne sur 1000 individus testés, 57 avaient déjà été infecté par la COVID 19.

   c. On veut calculer :
   $$\begin{aligned} P(X = 0) &= (1 - 0,057)^{100} \\ &\approx 0,002\,8 \end{aligned}$$
   La probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon est environ égale à $0,002\,8$.

d. On veut calculer :

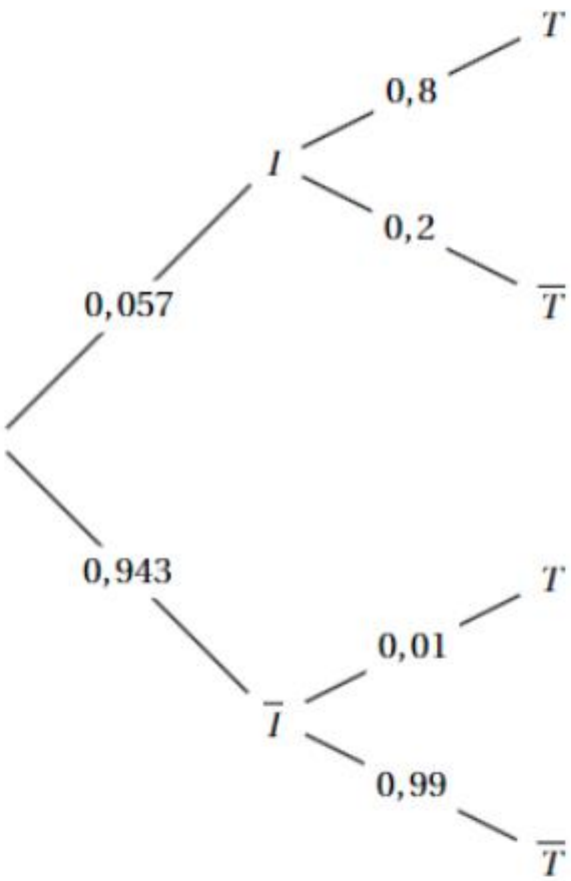
$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= 1 - P(X \leqslant 1) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - 0,943^{100} - \binom{100}{1} 0,057 \times 0,943^{99} \\ &\approx 0,980\,1 \end{aligned}$$

La probabilité qu'au moins 2 individus soient infectés dans l'échantillon est environ égale à $0,980\,1$.

e. La fonction $x \mapsto P(X \leqslant x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
D'après la calculatrice : $P(X \leqslant 8) \approx 0,883$ et $P(X \leqslant 9) \approx 0,941$.
Par conséquent, le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) > 0,9$ est 9.
La probabilité pour qu'il y ait au plus 9 individus infectés dans l'échantillon est supérieure à $0,9$.

Partie B

1. On obtient l'arbre des probabilités suivant :



2. $\left(I, \overline{I}\right)$ forme un système complet d'événements fini. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(I \cap T) + P\left(\overline{I} \cap T\right) \\ &= P(I) \times P_I(T) + P\left(\overline{I}\right) P_{\overline{I}}(T) \\ &= 0,057 \times 0,8 + 0,943 \times 0,01 \\ &= 0,055\ 03 \end{aligned}$$

3. On veut calculer :

$$\begin{aligned} P_T(I) &= \frac{P(I \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0,057 \times 0,8}{0,055\ 03} \\ &\approx 0,828\ 6 \end{aligned}$$

Partie C

On a, en gardant le nom des événements précédents : $P(T)=0,294\,4$, $P_I(T)=0,8$, $P_{\overline{I}}\left(\overline{T}\right)=0,99$.

$\left(I,\overline{I}\right)$ forme un système complet d'événements fini. D'après la formule des probabilités :

$$\begin{aligned}
&P(T)=P(I\cap T)+P\left(\overline{I}\cap T\right)\\
&\Leftrightarrow 0,294\,4=P(I)\times P_I(T)+(1-P(I))\left(1-P_{\overline{I}}\left(\overline{T}\right)\right)\\
&\Leftrightarrow 0,294\,4=0,8P(I)+(1-P(I))\times 0,01\\
&\Leftrightarrow 0,294\,4=0,8P(I)+0,01-0,01P(I)\\
&\Leftrightarrow 0,284\,4=0,79P(I)\\
&\Leftrightarrow P(I)=\frac{0,284\,4}{0,79}\\
&\Leftrightarrow P(I)=0,36
\end{aligned}$$

La probabilité que l'individu choisi ait été infecté est égale à $0,36$.

Exercice 4

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=1+\dfrac{1}{n+1}$.

   Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_n>1>0$: la suite est minorée par 0.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :
   $$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\\&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&>0\end{aligned}$$
   La suite est décroissante.
   Pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1\neq 0$.
   L'affirmation 1 est fausse

2. On a donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n+\left(\dfrac{3}{7}\right)^n$.

   Or $-1<\dfrac{3}{7}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{7}\right)^n=0$.
   et $\dfrac{9}{7}>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{9}{7}\right)^n=+\infty$.
   Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}-\left(\dfrac{9}{7}\right)^n+\left(\dfrac{3}{7}\right)^n=-\infty$ et $u_n\leqslant -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n+\left(\dfrac{3}{7}\right)^n$.
   D'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

L’Affirmation 2 est vraie.

3. L’appel $\text{terme}(4)$ renvoie la valeur $1+0+1+2+3=7$.
   L’affirmation 3 est vraie.

4. Avec le prix A il reçoit $1\ 000 \times 15 = 15\ 000$ euros.
   Avec le prix B il reçoit $1+2+2^2+\ldots+2^{14}$
   Il s’agit de la somme des 15 premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0=1$.
   Cette somme vaut $\dfrac{1-2^{15}}{1-2} = 2^{15}-1 = 32\ 767 > 15\ 000$
   L’affirmation 4 est fausse.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
   $$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \int_1^{n+1} \ln(x)\mathrm{d}x - \int_1^n \ln(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^n \ln(x)\mathrm{d}x + \int_n^{n+1} \ln(x)\mathrm{d}x - \int_1^n \ln(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(relation de Chasles)} \\ &= \int_n^{n+1} \ln(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$
   La fonction $\ln$ est continue et positive sur $[n;n+1]$.

Par positivité de l’intégrale, $v_{n+1}-v_n \geqslant 0$.
La suite (v_n) est croissante.
L’affirmation 5 est vraie.