Corrigé du baccalauréat S – Polynésie – 2 septembre 2020

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

   On extrait une boule de l'urne et on note sa couleur.

   On répète 4 fois cette expérience, de manière indépendante, en remettant la boule à chaque fois dans l'urne.

   La probabilité, arrondie au centième, d'obtenir au moins 1 boule blanche est :

   Réponse A : 0,15 **Réponse B :** 0,63 **Réponse C :** 0,5 $\boxed{\textbf{Réponse D : } 0{,}85}$

   Il y a 3 boules blanches sur un total de 8 boules, donc la probabilité de prendre une boule blanche est $\frac{3}{8}$.
   La variable aléatoire X qui donne le nombre de boules blanches tirées parmi 4 suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{3}{8}$.
   La probabilité d'obtenir au moins 1 boule blanche est :
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^4 \approx 0{,}85$.

2. Soit n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   Un sac contient n pièces indiscernables au toucher. Ces pièces comportent toutes un côté « PILE » et un côté « FACE » sauf une qui contient deux côtés « FACE ».

   On choisit au hasard une pièce du sac puis on la lance.

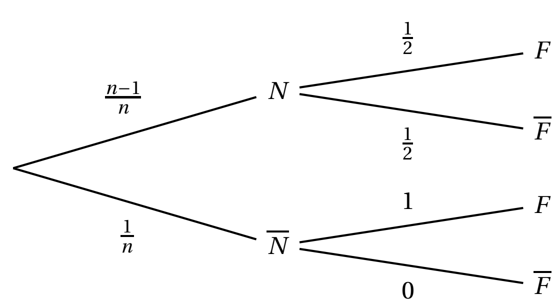
   La probabilité d'obtenir le côté « FACE » est égale à :

   Réponse A : $\dfrac{n-1}{n}$ $\boxed{\textbf{Réponse B : } \dfrac{n+1}{2n}}$ **Réponse C :** $\dfrac{1}{2}$ **Réponse D :** $\dfrac{n-1}{2n}$

   Soient les événements

   - N : « la pièce est normale, c'est-à-dire à deux côtés PILE et FACE »
   - F : « le côté obtenu est FACE »

   On représente la situation au moyen de l'arbre pondéré suivant :



   $P(F) = P(N \cap F) + P(\overline{N} \cap F) = \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \times 1 = \dfrac{n-1}{2n} + \dfrac{2}{2n} = \dfrac{n-1+2}{2n} = \dfrac{n+1}{2n}$

3. On considère T la variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 60$ et d'écart-type $\sigma = 6$. La probabilité $P_{(T>60)}(T > 72)$ arrondie au millième est :

Réponse A : 0,954 **Réponse B :** 1 **Réponse C :** 0,023 $\boxed{\textbf{Réponse D : } 0{,}046}$

$$P_{(T>60)}(T>72) = \frac{P((T>60)\cap(T>72))}{P(T>60)} = \frac{P(T>72)}{P(T>60)} \approx \frac{0{,}022\,75}{0{,}5} \approx 0{,}046$$

4. La durée de fonctionnement, exprimée en années, d'un moteur jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 3 ans est égale à :

$\boxed{\textbf{Réponse A : } \mathrm{e}^{-3\lambda}}$ **Réponse B :** $1 - \mathrm{e}^{-3\lambda}$ **Réponse C :** $\mathrm{e}^{3\lambda} - 1$ **Réponse D :** $\mathrm{e}^{3\lambda}$

D'après le cours, $P(X \geqslant t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ donc la probabilité cherchée est $\mathrm{e}^{-3\lambda}$.

5. On note X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. La probabilité qu'une valeur prise par la variable aléatoire X soit solution de l'inéquation $\cos x > \frac{1}{2}$ est égale à :

$\boxed{\textbf{Réponse A : } \frac{2}{3}}$ **Réponse B :** $\frac{1}{3}$ **Réponse C :** $\frac{1}{2}$ **Réponse D :** $\frac{1}{\pi}$

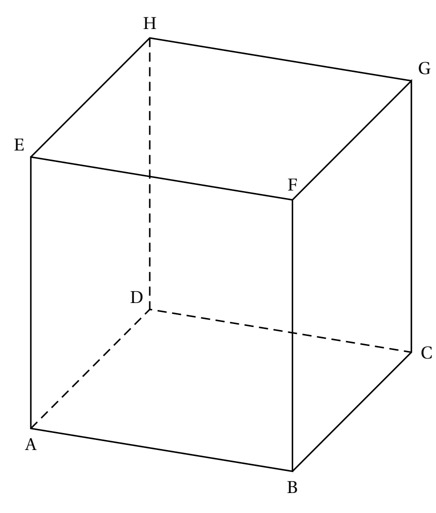
Sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos x > \frac{1}{2}$ pour $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right[$.

La probabilité cherchée est $\dfrac{\frac{\pi}{3}-0}{\frac{\pi}{2}-0} = \dfrac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{3} \times \dfrac{2}{\pi} = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit ABCDEFGH un cube. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.



Pour tout réel t, on considère le point M de coordonnées $(1-t\ ;\ t\ ;\ t)$.

1. Le point B a pour coordonnées (1 ; 0 ; 0), et comme $\overrightarrow{\text{AH}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AE}}$, le point H a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1).

   Le vecteur $\overrightarrow{\text{BM}}$ a pour coordonnées $(1-t-1\ ;\ t-0\ ;\ t-0)$ soit $(-t\ ;\ t\ ;\ t)$.

   Le vecteur $\overrightarrow{\text{BH}}$ a pour coordonnées $(0-1\ ;\ 1-0\ ;\ 1-0)$ soit $(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

   On a donc $\overrightarrow{\text{BM}} = t\,\overrightarrow{\text{BH}}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{BM}}$ et $\overrightarrow{\text{BH}}$ sont colinéaires, ce qui prouve que le point M appartient à la droite (BH) pour tout réel t.

On admet que les droites(BH) et (FC) ont respectivement pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1-t\\ y & = & t\\ z & = & t \end{array}\right. \text{ où } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1\\ y & = & t'\\ z & = & 1-t' \end{array}\right. \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

2. On va démontrer que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales et non coplanaires.

   - D'après sa représentation paramétrique, la droite (BH) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

     D'après sa représentation paramétrique, la droite (FC) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n'}$ de coordonnées $(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$.
     $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = (-1)\times 0 + 1\times 1 + 1\times(-1) = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n'}$.
     On en déduit que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales.
   - Si les droites les droites (BH) et (FC) sont coplanaires, comme elles sont orthogonales, elles seront sécantes ; il suffit donc de prouver que les droites (BH) et (FC) ne sont pas sécantes pour démontrer qu'elles ne sont pas coplanaires.

     Les droites (BH) et (FC) sont sécantes si on peut trouver t et t' tels que : $\left\{\begin{array}{l c l} 1-t & = & 1\\ t & = & t'\\ t & = & 1-t' \end{array}\right.$.

     Ce système n'a pas de solution donc les droites (BH) et (FC) ne sont pas sécantes, donc elles ne sont pas coplanaires.

3. Pour tout réel t', on considère le point $\text{M}'(1; t'; 1-t')$.

   a. $\text{MM}'^2 = (1-1+t)^2 + (t'-t)^2 + (1-t'-t)^2 = t^2 + t'^2 - 2tt' + t^2 + 1 - t' - t - t' + t'^2 + tt' - t + tt' + t^2$
   $= 3t^2 + 2t'^2 - 2t' - 2t + 1$

   $3\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2 + 2\left(t'-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{6} = 3\left(t^2 - \dfrac{2t}{3} + \dfrac{1}{9}\right) + 2\left(t'^2 - \dfrac{2t'}{2} + \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{6}$
   $= 3t^2 - 2t + \dfrac{1}{3} + 2t'^2 - 2t' + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = 3t^2 + 2t'^2 - 2t' - 2t + 1 = \text{MM}'^2$

   b. La distance MM' est minimale quand MM'^2 est minimale.

   MM'^2 est la somme de trois nombres positifs ou nuls, et sera minimale quand chacun de ces nombres est minimal.

   - $3\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2$ est minimale et vaut 0 pour $t = \dfrac{1}{3}$;
   - $2\left(t'-\dfrac{1}{2}\right)^2$ est minimale et vaut 0 pour $t' = \dfrac{1}{2}$.

Donc MM′ est minimale pour $t = \dfrac{1}{3}$ et $t' = \dfrac{1}{2}$; dans ce cas $\text{MM}' = \sqrt{\dfrac{1}{6}}$.

c. On nomme P le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}~;~\frac{1}{3}~;~\frac{1}{3}\right)$et Q celui de coordonnées $\left(1~;~\frac{1}{2}~;~\frac{1}{2}\right)$.

- Le point P appartient à la droite (BH) pour $t = \frac{1}{3}$, donc (BP) = (BH).
- Le point Q appartient à la droite (FC) pour $t' = \frac{1}{2}$, donc (QC) = (FC).
- Le vecteur $\overrightarrow{\text{PQ}}$ a pour coordonnées $\left(1 - \frac{2}{3}~;~\frac{1}{2} - \frac{1}{3}~;~\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}~;~\frac{1}{6}~;~\frac{1}{6}\right)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{\text{BP}}$ a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} - 1~;~\frac{1}{3} - 0~;~\frac{1}{3} - 0\right) = \left(-\frac{1}{3}~;~\frac{1}{3}~;~\frac{1}{3}\right)$.
- $\overrightarrow{\text{BP}} \cdot \overrightarrow{\text{PQ}} = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = 0$ donc $\overrightarrow{\text{BP}} \perp \overrightarrow{\text{PQ}}$ donc la droite (PQ) est perpendiculaire à la droite (BP) donc à la droite (BH).
- $\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}}$ donc C a pour coordonnées (1 ; 1 ; 0).
- Le vecteur $\overrightarrow{\text{QC}}$ a pour coordonnées $\left(1 - 1~;~1 - \frac{1}{2}~;~0 - \frac{1}{2}\right) = \left(0~;~\frac{1}{2}~;~-\frac{1}{2}\right)$.
- $\overrightarrow{\text{QC}} \cdot \overrightarrow{\text{PQ}} = 0 \times \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = 0 + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$ donc $\overrightarrow{\text{QC}} \perp \overrightarrow{\text{PQ}}$ donc la droite (PQ) est perpendiculaire à la droite (QC) donc à la droite (FC).

Donc la droite (PQ) est perpendiculaire aux deux droites (BH) et (FC).

Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{e}^{-x^2+1}$.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Pour tout x réel, $f(x) = x\text{e}^{-x^2+1} = x\text{e}^{-x^2} \times \text{e} = \dfrac{x}{\text{e}^{x^2}} \times \text{e} = \dfrac{\text{e}}{x} \times \dfrac{x^2}{\text{e}^{x^2}}$.

b.
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}}{x} = 0$.
- Pour tout réel X, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \dfrac{\text{e}^X}{X} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \dfrac{X}{\text{e}^X} = 0$.

  Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc en posant $X = x^2$, on déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\text{e}^{x^2}} = 0$.

Par produit de limites, on déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2. Pour tout réel x, on considère les points M et N de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisses respectives x et $-x$.

a. Les coordonnées de M sont $(x~;~f(x))$ et celles de N sont $(-x~;~f(-x))$.
$f(-x) = -x\text{e}^{-(-x)^2+1} = -x\text{e}^{-x^2+1} = -f(x)$
Le milieu de [MN] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x + (-x)}{2}~;~\dfrac{f(x) + (-f(x))}{2}\right) = (0~;~0)$.
C'est donc le point O.

b. La courbe $(\mathscr{C})$ est donc symétrique par rapport au point O.

3. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et
$f'(x) = 1 \times \text{e}^{-x^2+1} + x \times (-2x)\,\text{e}^{-x^2+1} = \left(1 - 2x^2\right)\text{e}^{-x^2+1}$

Pour tout réel x, $\text{e}^{-x^2+1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2x^2$ qui s'annule et change de signe pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0~;~+\infty[$.

$f(0) = 0$ et $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{e}^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{e}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2\text{e}}}{2} \approx 1{,}166$

D'où le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$1-2x^2$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2\text{e}}}{2}$	$\searrow$	0

4. **a.** Le maximum de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$ est $\frac{\sqrt{2\text{e}}}{2}$ qui est supérieur à 0,5.
On complète le tableau de variations de f, ce qui prouve que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet sur $[0\,;\,+\infty[$ exactement deux solutions notées α et β (avec $\alpha < \beta$).

x	0	α	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	β	$+\infty$
$f(x)$	0	$0{,}5$ $\nearrow$	$\frac{\sqrt{2\text{e}}}{2}$	$\searrow$ $0{,}5$	0

b. D'après le tableau de variations, on en déduit que les solutions sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'inéquation $f(x) \geqslant 0{,}5$ sont les éléments de l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$.

c. À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 0{,}19$ et $\beta \approx 1{,}43$.

5. Soit A un réel strictement positif. On pose $I_A = \displaystyle\int_0^A f(x)\,\text{d}x$.

a. Pour calculer $I_A = \displaystyle\int_0^A f(x)\,\text{d}x$, on cherche une primitive F de f.
La dérivée de la fonction $x \longmapsto \text{e}^{u(x)}$ est la fonction $x \longmapsto u'(x)\,\text{e}^{u(x)}$; donc la dérivée de $x \longmapsto \text{e}^{-x^2+1}$ est $x \longmapsto -2x\,\text{e}^{-x^2+1}$ donc la dérivée de $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\,\text{e}^{-x^2+1}$ est $x \longmapsto x\,\text{e}^{-x^2+1}$.
Donc la fonction f a pour primitive la fonction F définie par $F(x) = -\dfrac{1}{2}\,\text{e}^{-x^2+1}$.

$$I_A = \int_0^A f(x)\,\text{d}x = \big[F(x)\big]_0^A = F(A) - F(0) = -\frac{1}{2}\,\text{e}^{-A^2+1} + \frac{1}{2}\,\text{e}^{0+1} = \frac{1}{2}\left(\text{e} - \text{e}^{-A^2+1}\right)$$

b. $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -A^2+1 = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \text{e}^X = 0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \text{e}^{-A^2+1} = 0$
On en déduit que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} I_A = \frac{\text{e}}{2}$.

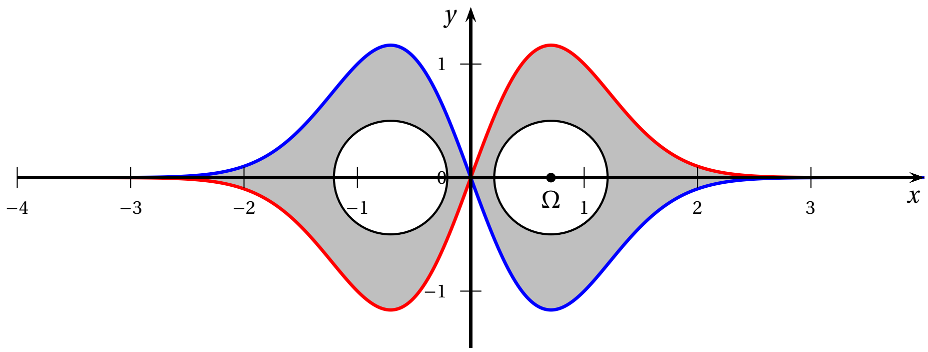
On admet que cette limite est l'aire en unités d'aire située entre la partie de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0\,;\,+\infty[$ et l'axe des abscisses.
On appelle $\mathscr{A}_1$ cette aire, donc d'après les questions précédentes, $\mathscr{A}_1 = \dfrac{\text{e}}{2}$.

6. Comme illustré sur le graphique ci-dessous, on s'intéresse à la partie grisée du plan qui est délimitée par :

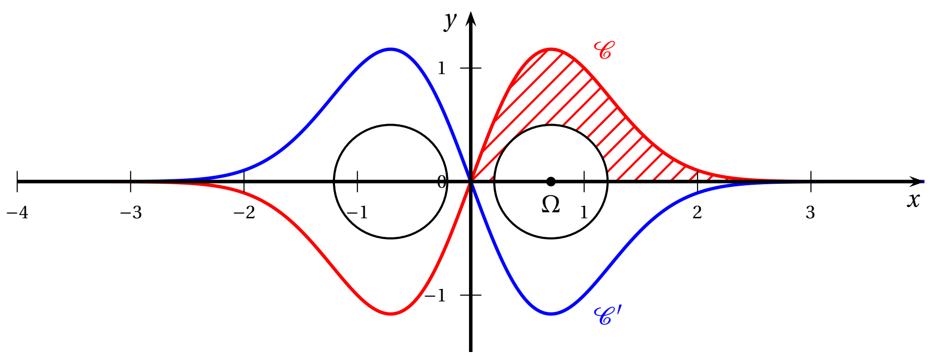
- la courbe $(\mathscr{C})$ sur $\mathbb{R}$ et la courbe $(\mathscr{C}')$ symétrique de $(\mathscr{C})$ par rapport à l'axe des abscisses ;

- le cercle de centre $\Omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}~;~0\right)$ et de rayon 0,5 et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On admet que le disque de centre $\Omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}~;~0\right)$ et de rayon 0,5 et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées sont situés entièrement entre la courbe $(\mathscr{C})$ et la courbe $(\mathscr{C}')$.



Pour des raisons de symétrie, l'aire cherchée est 4 fois l'aire hachurée ci-dessous :



L'aire hachurée est égale à l'aire $\mathscr{A}_1$ diminuée de l'aire $\mathscr{A}_2$ du demi-disque de centre Ω et de rayon 0,5.

$\mathscr{A}_2 = \dfrac{\pi \times (0,5)^2}{2} = \dfrac{\pi}{8}$

L'aire cherchée est donc $4\left(\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2\right) = 4\left(\dfrac{\text{e}}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right) = 2\,\text{e} - \dfrac{\pi}{2} \approx 3,87$ unités d'aire.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$.

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par : $z_0 = 0$et pour tout $n, z_{n+1} = (1+\text{i})\,z_n - \text{i}$.

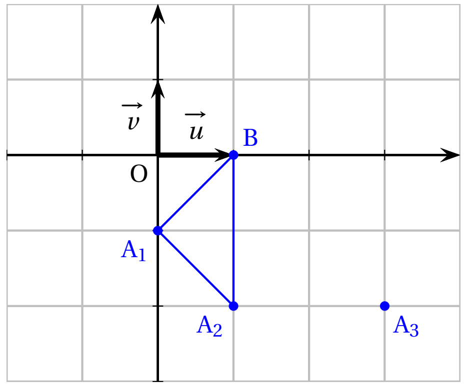
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n. On note B le point d'affixe 1.

1. **a.** $z_1 = (1+\text{i})\,z_0 - \text{i} = (1+\text{i}) \times 0 - \text{i} = -\text{i}$

$z_2 = (1+\text{i})\,z_1 - \text{i} = (1+\text{i}) \times (-\text{i}) - \text{i} = -\text{i} + 1 - \text{i} = 1 - 2\text{i}$

b. $z_3 = (1+\text{i})\,z_2 - \text{i} = (1+\text{i})\,(1-2\text{i}) - \text{i} = 1+\text{i}-2\text{i}+2-\text{i} = 3-2\text{i}$

c. On place les points B, A_1, A_2 et A_3 dans le repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$:



d. On démontre que le triangle BA_1A_2 est isocèle rectangle.

- $\text{BA}_1 = |z_1 - 1| = |-\text{i}-1| = \sqrt{2}$
  $\text{A}_1\text{A}_2 = |z_2 - z_1| = |-1-2\text{i}+\text{i}| = |-1-\text{i}| = \sqrt{2}$
  Donc le triangle BA_1A_2 est isocèle.
- $\text{BA}_2 = |1-2\text{i}-1| = |-2\text{i}| = 2$
  $\text{BA}_1^2 + \text{A}_1\text{A}_2^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2+2 = 4 = \text{BA}_2^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BA_1A_2 est rectangle en A_1.

On a donc démontré que le triangle BA_1A_2 était isocèle rectangle en A_1.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n - 1|$.

a. $u_{n+1} = |z_{n+1}-1| = |(1+\text{i})\,z_n - \text{i} - 1| = |(1+\text{i})\,z_n - (1+\text{i})| = |(1+\text{i})\,(z_n-1)| = |1+\text{i}|\times|z_n-1|$
$= \sqrt{2}\,u_n$ pour tout entier naturel n.

b. La distance BA_n est égale à $|z_n - 1|$ soit u_n.
$u_0 = |z_0 - 1| = |0-1| = |-1| = 1$
Pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{2}\,u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \sqrt{2}$ donc, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times \left(\sqrt{2}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n$.
On cherche n tel que $u_n > 1000$ donc on résout l'inéquation $\left(\sqrt{2}\right)^n > 1000$:

$$\left(\sqrt{2}\right)^n > 1000 \iff \ln\left(\left(\sqrt{2}\right)^n\right) > \ln(1000) \iff n \times \ln\left(\sqrt{2}\right) > \ln(1000) \iff n > \frac{\ln(1000)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)}$$

$\dfrac{\ln(1000)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)} \approx 19{,}9$ donc la distance BA_n est supérieure à 1 000 à partir de $n = 20$.

3. **a.** $1+\text{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$

b. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $z_n = 1 - \left(\sqrt{2}\right)^n\,\text{e}^{\text{i}\frac{n\pi}{4}}$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, $z_n = z_0 = 0$ et $1 - \left(\sqrt{2}\right)^n\,\text{e}^{\text{i}\frac{n\pi}{4}} = 1 - \left(\sqrt{2}\right)^0\,\text{e}^{\text{i}\frac{0\times\pi}{4}} = 1 - 1 = 0$
  Donc la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $z_n = 1 - \left(\sqrt{2}\right)^n\,\text{e}^{\text{i}\frac{n\pi}{4}}$.
  $z_{n+1} = (1+\text{i})\,z_n - \text{i} = \sqrt{2}\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} \times \left(1 - \left(\sqrt{2}\right)^n\,\text{e}^{\text{i}\frac{n\pi}{4}}\right) - \text{i} = \sqrt{2}\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} - \left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\,\text{e}^{\text{i}\frac{(n+1)\pi}{4}} - \text{i}$
  $= 1 + \text{i} - \left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\,\text{e}^{\text{i}\frac{(n+1)\pi}{4}} - \text{i} = 1 - \left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\,\text{e}^{\text{i}\frac{(n+1)\pi}{4}}$
  donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $z_n = 1 - \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}$.

c. Le point A_{2020} a pour affixe $z_{2020} = 1 - \left(\sqrt{2}\right)^{2020} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2020\pi}{4}}$.

$\dfrac{2020\pi}{4} = 505\pi = 252\times 2\pi + \pi$ donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2020\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(252\times 2\pi+\pi)} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}\right)^{252} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = 1^{252} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$

$z_{2020} = 1 - \left(\sqrt{2}\right)^{2020} \times (-1) = 1 + \left(\sqrt{2}\right)^{2020}$ est un réel donc le point A_{2020} appartient à l'axe des abscisses.

Exercice 4 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres entiers définies par :

$$a_1 = 1,\ b_1 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n \text{ non nul } \left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & 2a_n \end{array}\right. .$$

1. $a_2 = a_1 + b_1 = 1 + 0 = 1$; $b_2 = 2a_1 = 2 \times 1 = 2$; $a_3 = a_2 + b_2 = 1 + 2 = 3$; $b_3 = 2a_2 = 2 \times 1 = 2$

2. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M + 2I$

On admet que pour tout entier naturel non nul n, $M^n = a_nM + b_nI$, où (a_n) et (b_n) sont les suites précédemment définies.

3. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \neq 0$, X_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a. $AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + b_n \\ 2an + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$

b. On peut dire que $X_2 = AX_1$, $X_3 = AX_2 = A(AX_1) = A^2X_1$, etc., donc que $X_n = A^{n-1}X_1$.

c. $\det(P) = 1 \times (-2) - 1 \times 1 = -3 \neq 0$ donc la matrice P est inversible.

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$
- $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Donc l'inverse de la matrice P est la matrice $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

d. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1+1 & 1-2\\ 2+0 & 2+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\frac{4}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ qui est une matrice diagonale appelée D.

e. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $A^n = PD^nP^{-1}$.

- **Initialisation**
  $P^{-1}AP = D$ donc $PP^{-1}APP^{-1} = PDP^{-1}$ autrement dit $A = PDP^{-1}$ soit $A^1 = PD^1P^{-1}$.
  La propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire : $A^n = PD^nP^{-1}$.
  $A^{n+1} = A \times A^n = \left(PDP^{-1}\right)\left(PD^nP^{-1}\right) = PDPP^{-1}D^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$
  donc la propriété est vraie au rang $n+1$
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 1, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout $n \geqslant 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

f. On admet que pour tout $n \geqslant 1$: $A^{n-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\times 2^n + \frac{1}{3}\times(-1)^{n-1} & \frac{1}{3}\times 2^{n-1} + \frac{1}{3}\times(-1)^{n}\\ \frac{1}{3}\times 2^n - \frac{2}{3}\times(-1)^{n-1} & \frac{1}{3}\times 2^{n-1} - \frac{2}{3}\times(-1)^{n}\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} = X_n = A^{n-1}X_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\times 2^n + \frac{1}{3}\times(-1)^{n-1} & \frac{1}{3}\times 2^{n-1} + \frac{1}{3}\times(-1)^{n}\\ \frac{1}{3}\times 2^n - \frac{2}{3}\times(-1)^{n-1} & \frac{1}{3}\times 2^{n-1} - \frac{2}{3}\times(-1)^{n}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\times 2^n + \frac{1}{3}\times(-1)^{n-1}\\ \frac{1}{3}\times 2^n - \frac{2}{3}\times(-1)^{n-1}\end{pmatrix}$

Donc $a_n = \frac{1}{3}\times 2^n + \frac{1}{3}\times(-1)^{n-1} = \frac{1}{3}\left(2^n + (-1)^{n-1}\right)$.

4. Soit k un entier naturel.

$2^4 = 16 \equiv 1$ modulo 5, donc $\left(2^4\right)^k \equiv 1^k$ modulo 5, donc $2^{4k} - 1 \equiv 0$ modulo 5.

5. Soit n un entier naturel non nul et multiple de 4 ; donc on peut écrire $n = 4k$.

a. $a_n = \frac{1}{3}\left(2^n + (-1)^{n-1}\right)$ donc
$3a_n = 2^n + (-1)^{n-1} = 2^{4k} + (-1)^{4k-1} = 2^{4k} + (-1)^{4k} \times (-1)^{-1} = 2^{4k} - 1 \equiv 0$ modulo 5.
Donc $3a_n$ est divisible par 5.

b. $3a_n$ est divisible par 5 donc 5 divise $3a_n$.
Or 3 et 5 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 5 divise a_n, ce qui veut dire que a_n est divisible par 5.