Corrigé du bac 2024 aux centres étrangers – Sujet n° 2

Mathovore.fr

Exercice 1

1. On effectue 3 tirages avec remise dans un ensemble à 8 éléments. Il s'agit donc de déterminer le nombre de 3-listes possibles constitués d'éléments de cet ensemble.
   Il existe ainsi $8^3 = 512$ tirages possibles.

2. **a.** Il s'agit de compter le nombre d'arrangements possibles de 3 éléments dans un ensemble à 8 éléments.
   Il y a donc $8 \times 7 \times 6 = 336$ tirages sans répétition de numéro.

   b. Il y a donc $512 - 336 = 176$ tirages contenant au moins une répétition de numéro.

3. Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité. Donc, pour tout entier k compris entre 1 et 8, tous les deux inclus, $P(X_1 = k) = \dfrac{1}{8}$.
   Remarque : On dit que X_1 suit la loi uniforme sur l'ensemble des entiers de 1 à 8.

4. L'espérance de X_1 est donc :
$$\begin{aligned} E(X_1) &= \frac{1}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times 2 + \ldots + \frac{1}{8} \times 8 \\ &= \frac{1}{8}(1 + 2 + \ldots + 8) \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{8 \times 9}{2} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

5. X_1, X_2 et X_3 suivent la même loi. Elles ont donc la même probabilité.
   D'après la linéarité de l'espérance :
$$\begin{aligned} E(S) &= E(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) \\ &= 3E(X_1) \\ &= \frac{27}{2} \end{aligned}$$

6. L'unique façon pour que $S = 24$ est d'obtenir le numéro 8 au trois tirages.
   Par conséquent $P(S = 24) = \dfrac{1}{512}$.

7. **a.** Si le joueur obtient au plus trois 7 alors la somme des numéros vaut au plus $3 \times 7 = 21$. De même s'il obtient au plus deux 8 et un 5 la somme des numéros vaut $8 + 8 + 5 = 21$.
   Les seuls tirages permettant d'avoir une somme supérieure ou égale à 22 sont donc :
   $7-7-8$; $7-8-7$; $8-7-7$; $7-8-8$; $8-7-8$; $8-8-7$; $8-8-8$; $8-8-6$; $8-6-8$ et $6-8-8$.
   Il existe donc exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.

   b. La probabilité de gagner un lot vaut donc $\dfrac{10}{512} = \dfrac{5}{256}$.

Exercice 2

1. **a.** $\lim\limits_{x \to 1^-} \mathrm{e}^x = \mathrm{e} > 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} x - 1 = 0^-$.
   Par conséquent $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

   b. La droite d'équation $x = 1$ est donc une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 1 = -\infty$.
   Par conséquent $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

3. **a.** Par hypothèse, f est dérivable sur $]-\infty; 1[$.
   Pour tout réel $x < 1$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x(x-1) - \mathrm{e}^x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(x-1-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(x-2)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

b. Pour tout réel $x \leqslant 1$ on a :
• $x - 2 < 0$
• $\mathrm{e}^x > 0$
• $(x-1)^2 > 0$
Ainsi, $f'(x) < 0$ pour tout réel $x < 1$.
On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	‖
f	0	↘	$-\infty$ ‖

4. **a.** Pour tout réel $x < 1$ on a $\mathrm{e}^x > 0$ et $(x-1)^3 < 0$.
On étudie le signe du polynôme du second degré $x^2 - 4x + 5$.
Son discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 \times 1 = -4 < 0$.
Le signe de ce polynôme ne dépend donc que de celui de son terme principal. Ainsi, $x^2 - 4x + 5 > 0$ sur $]-\infty; 1[$.
Donc $f''(x) < 0$ sur $]-\infty; 1[$.
La fonction f est par conséquent concave sur $]-\infty; 1[$.

b. On a $f(0)=-1$ et $f'(0)=-2$.
Une équation de T est donc $y=-2x-1$.

c. f est concave sur $]-\infty;1[$. Sa courbe représentative est donc au-dessous de ses tangentes sur cet intervalle.
Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant -2x-1 &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^x}{x-1} \leqslant -2x-1 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1) \qquad \text{car } x-1<0 \end{aligned}$$

5. **a.** La fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]-\infty;1[$.
De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=0$ et De plus $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)=-\infty$.
Or $-2 \in]-\infty;0[$.
D'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

b. On a $f(0,31) \approx -1,976 > -2$ et $f(0,32) \approx -2,025 < -2$.
Ainsi $f(0,31) > f(\alpha) > f(0,32)$
Par conséquent $0,31 < \alpha < 0,32$.

Exercice 3

1. I a pour coordonnées $(0,5;0;0)$ et J a pour coordonnées $(1;1;0,5)$.

2. H a pour coordonnées $(0;1;1)$, F a pour coordonnées $(1;0;1)$ et E a pour coordonnées $(0;0;1)$.
Ainsi $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}1\\1\\-0,5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix}-0,5\\0\\-1\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FI}$ n'ont pas la même composante nulle. Ils ne sont donc pas colinéaires.
D'une part : $\overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{FH}=-1+1+0=0$
D'autre part : $\overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{FI}=-0,5+0+0,5=0$
$\overrightarrow{EJ}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FHI). Il est normal à ce plan.

3. Une équation cartésienne du plan (FHI) est donc $x+y-0,5z+d=0$.
Or $F(1;0;1)$ appartient à ce plan. Donc $1+0-0,5+d=0 \Leftrightarrow d=-0,5$.
Une équation cartésienne du plan (FHI) est par conséquent $x+y-0,5z-0,5=0$.
En multipliant cette équation par -2 on obtient alors $-2x-2z+z+1=0$.

4. Une représentation paramétrique de la droite (EJ) est : $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-0,5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

5. **a.** Les coordonnées du point K sont donc les solutions du système :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 0,5t \\ -2x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 0,5t \\ -2t - 2t + 1 - 0,5t + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 0,5t \\ -4,5t = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 0,5t \\ t = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{9} \\ y = \dfrac{4}{9} \\ z = \dfrac{7}{9} \\ t = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

Donc K a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{9}; \dfrac{4}{9}; \dfrac{7}{9}\right)$.

b. Le triangle EFI est isocèle en I.
Son aire est

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \frac{EF \times IL}{2} \\ &= \frac{EF \times AE}{2} \\ &= \frac{1 \times 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On appelle M me milieu de $[FB]$. M est également le projeté orthogonal du point J sur le plan (EFB).
Le volume de la pyramide $EFHI$ est donc :

$$\begin{aligned} V &= \frac{\mathscr{A} \times JM}{3} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times 1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Le volume de la pyramide $EFHI$ est $\dfrac{1}{6}$ cm^3.

c. On a $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\ \\ \frac{4}{9}\\ \\ -\frac{2}{9}\end{pmatrix}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}EK &= \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{16}{81}+\frac{16}{81}+\frac{4}{81}}\\ &= \sqrt{\frac{36}{81}}\\ &= \frac{6}{9}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Par conséquent, en appelant $\mathscr{B}$ l'aire du triangle FHI on a :

$$\begin{aligned}V=\frac{1}{6} &\Leftrightarrow \frac{\mathscr{B}\times EK}{3}=\frac{1}{6}\\ &\Leftrightarrow \mathscr{B}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \mathscr{B}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

L'aire du triangle FHI est $\frac{3}{4}$ cm^2.

Exercice 4

Partie A

1. Par hypothèse, f est dérivable sur $[0;+\infty[$.
   Pour tout réel $x \geqslant 0$ on a :
   $$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\\ &> 0\end{aligned}$$
   f est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2. Pour tout réel $x \geqslant 0$ on a :
   $$\begin{aligned}f(x)-x &= \sqrt{x+1}-x\\ &= \left(\sqrt{x+1}-x\right)\times\frac{\sqrt{x+1}+x}{\sqrt{x+1}+x}\\ &= \frac{x+1-x^2}{\sqrt{x+1}+x}\\ &= \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, sur $[0;+\infty[$:
$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow f(x) - x = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x} = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2+x+1 = 0 \qquad \text{car } \sqrt{x+1}+x > 0 \end{aligned}$$
Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$.
Elle possède donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$.
L'équation $f(x) = x$ admet donc une unique solution sur $[0;+\infty[$ qui est $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Remarque : Il s'agit du nombre d'or !

Partie B

1. Pour tout entier naturel n on note $P(n) :\ 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Initialisation : $u_1 = \sqrt{6}$. Or $1 < \sqrt{6} < 5$.
Donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$ et $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel. On suppose que $P(n)$ est vraie.
$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
La fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$.
Par conséquent $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$
Soit $\sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. Or $1 \leqslant \sqrt{2}$.
Donc $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ et $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n on a $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone; elle converge.

3. (u_n) converge et pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue (car dérivable) sur $[0;+\infty[$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geqslant 1 > 0$.
Par conséquent la limite L de cette suite est solution de l'équation $f(x) = x$ dont l'unique solution sur $[0;+\infty[$ est ℓ.
(u_n) converge donc vers ℓ.

4. **a.** D'après la calculatrice $\text{seuil}(2)$ renvoie 5.

b. Cela signifie que u_9 est une approximation de ℓ à au moins 10^4 près.