Corrigé du baccalauréat Centres étrangers 11 mai 2022

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 7 points **Thème : Fonction logarithme**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Les six questions sont indépendantes.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$.
Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2022$

a. n'admet aucune solution.
b. admet exactement une solution.
c. admet exactement deux solutions.
d. admet une infinité de solutions.

Comme $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$, $f$est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. On en déduit que sur $\mathbb{R}_+$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 + x^2\right) = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

f croit strictement de $f(0) = \ln 1 = 0$ à plus l'infini.

f étant continue car dérivable sur $\mathbb{R}_+$ le théorème des valeurs intermédiaire assure qu'il existe un réel unique $\alpha \in]0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2022$. Réponse **b.**

2. Soit la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par :

$$g(x) = x\ln(x) - x^2$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. La fonction g est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.
b. La fonction g est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.
c. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet exactement un point d'inflexion sur $]0\,;\,+\infty[$.
d. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet exactement deux points d'inflexion sur $]0\,;\,+\infty[$.

Sur $\mathbb{R}_+$, g est dérivable et sur cet intervalle, $f'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 2x = \ln(x) - 2x + 1$.

Puis $f''(x) = \dfrac{1}{x} - 2$.

On a donc $f''(x) = 0 \iff \dfrac{1}{x} - 2 = 0 \iff \dfrac{1}{x} = 2 \iff x = \dfrac{1}{2}$.

Sur $]0\,;\,+\infty[$, f a un seul point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{1}{2}$. Réponse **c.**

3. On considère la fonction f définie sur $]-1~;~1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

Une primitive de la fonction f est la fonction g définie sur l'intervalle $]-1~;~1[$ par :

a. $g(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$

b. $g(x) = \dfrac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$

c. $g(x) = \dfrac{x^2}{2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)}$

d. $g(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(1-x^2\right)$

Soit la fonction g définie sur $]-1~;~1[$ par $g(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$.

En posant $u(x) = 1-x^2$, dérivable et non nulle sur $]-1~;~1[$, on a $g'(x) = -2x$ et on sait que $g(x) = -\frac{1}{2}\ln u(x)$ entraîne $g'(x) = -\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{2}\frac{-2x}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} = f(x)$. Réponse **a.**

4. La fonction $x \longmapsto \ln\left(-x^2-x+6\right)$ est définie sur

a. $]-3~;~2[$

b. $]-\infty~;~6]$

c. $]0~;~+\infty[$

d. $]2~;~+\infty[$

La fonction est définie si $-x^2-x+6>0 \iff x^2+x-6<0$.

Le trinôme x^2+x-6 a une racine évidente : 2. Le produit des racines étant égal à -6, l'autre racine est donc -3.

Donc $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$. On sait que ce trinôme est positif sauf (ce que l'on cherche entre les racines -3 et 2.

La fonction est donc définie sur l'intervalle $]-3~;~2[$. Réponse **a.**

5. On considère la fonction f définie sur $]0,5~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x^2-4x+3\ln(2x-1)$$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a. $y = 4x-7$

b. $y = 2x-4$

c. $y = -3(x-1)+4$

d. $y = 2x-1$

6. L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$ est :

a. $S =]-\infty~;~-2[\cup]1~;~+\infty[$

b. $S =]1~;~+\infty[$

c. $S = \emptyset$

d. $S =]-1~;~1[$

EXERCICE 2 7 points **Thème : Géométrie dans l'espace**

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$, on considère les points :

$$\text{A}(2~;~0~;~3),\ \text{B}(0~;~2~;~1),\ \text{C}(-1~;~-1~;~2)\ \text{et}\ \text{D}(3~;~-3~;~-1).$$

1. **Calcul d'un angle**

   a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Calculer les longueurs AB et AC.

   c. À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

2. **Calcul d'une aire**

   a. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).

   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

   c. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathscr{P}$

   d. Calculer l'aire du triangle ABC.

3. **Calcul d'un volume**

   a. Soit le point F$(1\,;\,-1\,;\,3)$. Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.

   b. Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

   c. Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.

EXERCICE 3 7 points — Thèmes : Fonction exponentielle et suite

Partie A :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^x - x$$

1. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.
3. En déduire que :

   si a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$ alors $h(a) - h(b) < 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'écart entre T et $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.
Cet écart est défini comme la différence des ordonnées des points de T et $\mathscr{C}_f$ de même abscisse.
On s'intéresse aux points d'abscisse $\dfrac{1}{n}$, avec n entier naturel non nul.
On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$$

2.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{n+1} - u_n = h\left(\frac{1}{n+1}\right) h\left(\frac{1}{n}\right)$$

où h est la fonction définie à la partie A.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

5. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées à 10^{-9} des premiers termes de la suite (u_n).

n	u_n
1	0,718 281 828
2	0,148 721 271
3	0,062 279 092
4	0,034 025 417
5	0,021 402 758
6	0,014 693 746
7	0,010 707 852
8	0,008 148 453
9	0,006 407 958
10	0,005 170 918

Donner la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle l'écart entre T et $\mathscr{C}_f$ semble être inférieur à 10^{-2}.

Exercice 4 7 points Thème : Probabilités

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Au cours de la fabrication d'une paire de lunettes, la paire de verres doit subir deux traitements notés T1 et T2.

Partie A

On prélève au hasard une paire de verres dans la production.
On désigne par A l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 ».
On désigne par B l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 ».
On note respectivement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et B.
Une étude a montré que :

- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 notée $P(A)$ est égale à 0,1.
- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 notée $P(B)$ est égale à 0,2.
- la probabilité qu'une paire de verres ne présente aucun des deux défauts est 0,75.

1. Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			1

2. a. Déterminer, en justifiant la réponse, la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.

b. Donner la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts, un pour chaque traitement T1 et T2.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

3. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.

4. Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T2, sachant que cette paire de verres présente un défaut pour le traitement T1.

Partie B

On prélève, au hasard, un échantillon de 50 paires de verres dans la production. On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de ce type, associe le nombre de paires de verres qui présentent le défaut pour le traitement T1.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

2. Donner l'expression permettant de calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, exactement 10 paires de verres qui présentent ce défaut.

Effectuer ce calcul et arrondir le résultat à 10^{-3}.

3. En moyenne, combien de paires de verres ayant ce défaut peut-on trouver dans un échantillon de 50 paires ?