Corrigé du baccalauréat Centres étrangers 11 mai 2022

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 7 points **Thème : Fonction logarithme**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Les six questions sont indépendantes.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$.
Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2022$

a. n'admet aucune solution.
b. admet exactement une solution.
c. admet exactement deux solutions.
d. admet une infinité de solutions.

On a : $f(x) = 2022 \iff \ln\left(1+x^2\right) = 2022 \iff \mathrm{e}^{\ln\left(1+x^2\right)} = \mathrm{e}^{2022} \iff 1+x^2 = \mathrm{e}^{2022} \iff$
$x^2 = \mathrm{e}^{2022} - 1$: ce nombre étant positif, l'équation a deux solutions : $\sqrt{\mathrm{e}^{2022}-1}$ et $-\sqrt{\mathrm{e}^{2022}-1}$
Réponse **c.**

2. Soit la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par :

$$g(x) = x\ln(x) - x^2$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. La fonction g est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.
b. La fonction g est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.
c. La courbe $\mathscr{C}_g$ admet exactement un point d'inflexion sur $]0\,;\,+\infty[$.
d. La courbe $\mathscr{C}_g$ admet exactement deux points d'inflexion sur $]0\,;\,+\infty[$.

Sur $\mathbb{R}_+$, g est dérivable et sur cet intervalle, $f'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 2x = \ln(x) - 2x + 1$.

Puis $f''(x) = \dfrac{1}{x} - 2$.

On a donc $f''(x) = 0 \iff \dfrac{1}{x} - 2 = 0 \iff \dfrac{1}{x} = 2 \iff x = \dfrac{1}{2}$.

Sur $]0\,;\,+\infty[$, f a un seul point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{1}{2}$. Réponse **c.**

3. On considère la fonction f définie sur $]-1\,;\,1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

Une primitive de la fonction f est la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$ par :

a. $g(x) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$ **b.** $g(x) = \dfrac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$

c. $g(x) = \dfrac{x^2}{2\left(x-\dfrac{x^3}{3}\right)}$ **d.** $g(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln\left(1-x^2\right)$

Soit la fonction g définie sur $]-1\ ;\ 1[$ par $g(x) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$.

En posant $u(x) = 1-x^2$, dérivable et non nulle sur $]-1\ ;\ 1[$, on a $g'(x) = -2x$ et on sait que $g(x) = -\dfrac{1}{2}\ln u(x)$ entraîne $g'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)} = -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-2x}{1-x^2} = \dfrac{x}{1-x^2} = f(x)$. Réponse **a.**

4. La fonction $x \longmapsto \ln\left(-x^2-x+6\right)$ est définie sur

a. $]-3\ ;\ 2[$ **b.** $]-\infty\ ;\ 6]$

c. $]0\ ;\ +\infty[$ **d.** $]2\ ;\ +\infty[$

La fonction est définie si $-x^2-x+6>0 \iff x^2+x-6<0$.

Le trinôme x^2+x-6 a une racine évidente : 2. Le produit des racines étant égal à -6, l'autre racine est donc -3.

Donc $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$. On sait que ce trinôme est positif sauf (ce que l'on cherche) entre les racines -3 et 2.

La fonction est donc définie sur l'intervalle $]-3\ ;\ 2[$. Réponse **a.**

5. On considère la fonction f définie sur $]0,5\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2-4x+3\ln(2x-1)$$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a. $y = 4x-7$ **b.** $y = 2x-4$

c. $y = -3(x-1)+4$ **d.** $y = 2x-1$

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

- $f(1) = 1-4+3\ln(2-1) = -3+3\times 0 = -3$;
- $f'(x) = 2x-4+3\times\dfrac{2}{2x-1} = 2x-1+\frac{6}{2x-1}$, d'où $f'(1) = 2-1+\dfrac{6}{2} = 1+3 = 4$.

Une équation de la tangente est donc $y-(-3) = 4(x-1) \iff y = 4x-4-3 \iff y = 4x-7$. Réponse **a.**

6. L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$ est :

a. $S =]-\infty\ ;\ -2[\cup]1\ ;\ +\infty[$ **b.** $S =]1\ ;\ +\infty[$

c. $S = \emptyset$ **d.** $S =]-1\ ;\ 1[$

D'après l'énoncé il faut que $x>-3$ et que $x>-1$. Il faut donc résoudre l'inéquation dans l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

$\ln(x+3) < 2\ln(x+1) \iff \ln(x+3) < \ln(x+1)^2 \iff x+3 < (x+1)^2 \iff 0 < x^2+2x+1-x-3 \iff 0 < x^2+x-2$.

Le trinôme x^2+x-2 a une racine évidente 1 ; comme le produit des racines est égal à -2, l'autre racine est -2. On a donc :

$x^2+x-2>0 \iff (x-1)(x+2)>0$: le trinôme est positif (ce que l'on cherche) sauf entre les racines. D'après la remarque préliminaire $S=\{]1\ ;\ +\infty[\}$. Réponse **b.**

EXERCICE 2 7 points **Thème : Géométrie dans l'espace**

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$\mathrm{A}(2\ ;\ 0\ ;\ 3),\ \mathrm{B}(0\ ;\ 2\ ;\ 1),\ \mathrm{C}(-1\ ;\ -1\ ;\ 2) \text{ et } \mathrm{D}(3\ ;\ -3\ ;\ -1).$$

1. **Calcul d'un angle**

   a. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$; or ces coordonnées ne sont pas proportionnelles $\dfrac{-2}{-3}\neq\dfrac{2}{-1}\neq\dfrac{-2}{-1}$,

   donc il n'existe pas de réel $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AC}}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. • $\mathrm{AB}^2=4+4+4=3\times4$, donc $\mathrm{AB}=2\sqrt{3}$:
   • $\mathrm{AC}^2=9+1+1=11$, donc $\mathrm{AC}=\sqrt{11}$.

   c. • D'une part $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6-2+2=6$;
   • D'autre part $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\widehat{\mathrm{BAC}}$.

   On a donc $6=2\sqrt{3}\times\sqrt{11}\times\cos\widehat{\mathrm{BAC}}\iff\cos\widehat{\mathrm{BAC}}=\dfrac{6}{2\sqrt{3}\times\sqrt{11}}=\dfrac{3}{\sqrt{33}}$.

   La calculatrice donne $\widehat{\mathrm{BAC}}\approx58{,}51$, soit $58{,}5°$ au dixième près.

2. **Calcul d'une aire**

   a. Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point de $\mathscr{P}$. On a $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in\mathscr{P}\iff\overrightarrow{\mathrm{C}M}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$.

   Avec $\overrightarrow{\mathrm{C}M}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\\z-2\end{pmatrix}$, on obtient :

   $-2(x+1)+2(y+1)-2(z-2)=0\iff-(x+1)+(y+1)-(z-2)=0\iff-x+y-z+2=0$.

   b. En prenant le vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ comme vecteur directeur de la droite (AB), soit $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ on a :

   $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\mathrm{AB})\iff\overrightarrow{\mathrm{A}M}=t\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\iff\left\{\begin{array}{rcl}x-2&=&t\times(-1)\\y-0&=&t\times1\\z-3&=&t\times(-1)\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}\iff$

   $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&2-t\\y&=&t\\z&=&3-t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$

c. E projeté orthogonal de C sur (AB) appartient au plan $\mathscr{P}$ et à la droite (AB) ; ses coordonnées vérifient donc l'équation de $\mathscr{P}$ et les équations paramétriques de (AB), donc le système :

$\left\{\begin{array}{rcl} -x+y-z+2 &=& 0\\ x &=& 2-t\\ y &=& t\\ z &=& 3-t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$; en remplaçant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation de $\mathscr{P}$ on obtient :

$-2+t+t-3+t+2=0 \iff 3t-3=0 \iff t=1$.

On a donc E(1 ; 1 ; 2).

d. On a $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}$, d'où $\text{BC}^2 = 1+9+1 = 11$ et $\text{BC} = \sqrt{11}$.

Comme $\text{AC} = \text{BC} = \sqrt{11}$, le triangle ABC est isocèle en C; or on a vu que E est le projeté de C sur la droite (AB), donc dans le triangle isocèle (ABC), [CE] est la hauteur relative à la base [AB].

On a $\overrightarrow{\text{CE}}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, d'où $\text{CE}^2 = 1+4 = 8$ et $\text{CE} = 2\sqrt{2}$.

L'aire du triangle (ABC) est donc égale à :

$\mathscr{A}(\text{ABC}) = \dfrac{\text{AB}\times\text{CE}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$.

3. Calcul d'un volume

a. $\text{F} \in (\text{ABC}) \iff$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, tels que : $\overrightarrow{\text{AF}} = \alpha\overrightarrow{\text{AB}} + \beta\overrightarrow{\text{AC}} \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} -1 &=& -2\alpha-3\beta\\ -1 &=& 2\alpha-\beta\\ 0 &=& -2\alpha-\beta\end{array}\right.$. En ajoutant membre à membre les deux dernières équations on obtient $-1=-2\beta \iff \beta = \dfrac{1}{2}$ et en remplaçant β par $\dfrac{1}{2}$ dans la première équation $-1 = -2\alpha+\dfrac{3}{2} \iff 2\alpha = 1-\dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2} \iff \alpha = -\dfrac{1}{4}$.

Donc $\overrightarrow{\text{AF}} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{AB}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AC}}$: les quatre points A, B, C et F sont coplanaires.

b. Avec $\overrightarrow{\text{FD}}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$, on peut calculer :

$\overrightarrow{\text{FD}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = -2-2+4 = 0$ et
$\overrightarrow{\text{FD}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = -6+2+4 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{FD}}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il est donc orthogonal à ce plan, ou encore la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

c. Si l'on choisit comme base le triangle (ABC), la hauteur de ce tétraèdre est donc [FD] et la volume est égal à :

$\mathscr{V}(\text{ABCD}) = \dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{ABC})\times\text{FD}$

Avec $\text{FD}^2 = 4+4+16 = 24$, on trouve $\text{FD} = \sqrt{24} = \sqrt{4\times 6} = 2\sqrt{6}$, d'où :
$\mathcal{V}(\text{ABCD}) = \dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{6}\times 2\sqrt{6} = \dfrac{4\times 6}{3} = 8$.

EXERCICE 3 7 points **Thèmes : Fonction exponentielle et suite**

Partie A :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \text{e}^x - x$$

1. • $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^x = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$, donc par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.

• Pour $x \neq 0$, $h(x) = x\left(\dfrac{\text{e}^x}{x} - 1\right)$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x} = +\infty$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x} - 1 = +\infty$ et par produit de limites :
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$;

2. Somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$h'(x) = \text{e}^x - 1$.

• $h'(x) > 0 \iff \text{e}^x - 1 > 0 \iff \text{e}^x > 1 \iff \text{e}^x > \text{e}^0 \iff x > 0$;

• $h'(x) < 0 \iff \text{e}^x - 1 < 0 \iff \text{e}^x < 1 \iff \text{e}^x < \text{e}^0 \iff x < 0$.

La fonction h est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ de plus l'infini à $h(0) = \text{e}^0 - 0 = 1$, puis croissante sur $\mathbb{R}_+$ de $h(0) = 1$ à plus l'infini.

3. h étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, $0 < a < b \Rightarrow h(0) < h(a) < h(b)$.
Comme $h(0) = 1$, on a donc $1 < h(a) < h(b) \Rightarrow h(a) - h(b) < 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^x$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. On a $M(x ; y) \in T \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.
On a $f'(x) = f(x) = \text{e}^x$ d'où $f'(0) = \text{e}^0 = 1$ et $f(0) = \text{e}^0 = 1$.
$M(x ; y) \in T \iff y - 1 = 1(x-0) \iff y = x+1$.

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.
Cet écart est défini comme la différence des ordonnées des points de T et $\mathcal{C}_f$ de même abscisse.
On s'intéresse aux points d'abscisse $\dfrac{1}{n}$, avec n entier naturel non nul.
On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$$

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 - 0 - 1 = 0$.

3. **a.** On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \exp\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \dfrac{1}{n+1} - 1 - \left(\exp\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} - 1\right) =$
$\exp\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \dfrac{1}{n+1} - 1 - \exp\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} + 1 = \exp\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \dfrac{1}{n+1} - \exp\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} =$
$\exp\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \dfrac{1}{n+1} - \left[\exp\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right] = h\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - h\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

b. On a n non nul, donc $0 < n < n+1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \Rightarrow h\left(\dfrac{1}{n+1}\right) < h\left(\dfrac{1}{n}\right) \Rightarrow$
$h\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - h\left(\dfrac{1}{n}\right) < 0$.
Finalement pour n non nul, $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

4. Le tableau montre que $u_8 \approx 0,008 < 10^{-2}$.

Donc pour $x = \dfrac{1}{8}$, l'écart entre la courbe et la tangente est inférieur à un centième.

EXERCICE 4 **7 points** **Thème : Probabilités**

Partie A

1. Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,05	0,15	0,2
$\overline{B}$	0,05	0,75	0,8
Total	0,1	0,9	1

2. **a.** La probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2 est l'évènement contraire de l'évènement « une paire de verres ne présente aucun des deux défauts », donc sa probabilité est égale $1 - 0,75 = 0,25$. Ou encore $P(A \cup B) = 1 - \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

b. • On a $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0,1 = 0,9$;

• On a $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0,2 = 0,8$.

Donc $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,8 - 0,75 = 0,05$ et

$P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0,9 - 0,75 = 0,15$.

Donc la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts est égale à :

$P(A \cap B) = 1 - P\left(A \cap \overline{B}\right) - P\left(B \cap \overline{A}\right) - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - 0,05 - 0,15 - 0,75 = 0,05$.

c. $P(A) \times P(B) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$ et $P(A \cap B) = 0,05$.

On a donc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$: les évènements A et B ne sont pas indépendants.

3. On a $P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0,05 + 0,15 = 0,2$

4. On a $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,05}{0,1} = \dfrac{1}{2}$.

Partie B

1. La production est suffisamment importante pour que la probabilité d'avoir le déf ut $T1$ est égale à 0,1. Comme il y a 50 tirages indépendants, la variable aléatoire X suit une moi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$.

2. On sait que $P(X = 10) = \binom{50}{10} \times 0,1^{10} \times (1 - 0,1)^{50)10}$.

   La calculatrice donne $P(X = 10) \approx 0,015$ au millième près.

3. La moyenne est l'espérance de la variable X et on sait que $E(X) = n \times p = 50 \times 0,1 = 5$.