ᔕ Corrigé du baccalauréat Asie 17 mai 2022 Jour 1 ᔓ

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices.**

Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20 points).

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

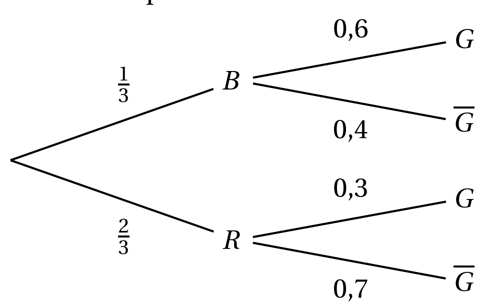
EXERCICE 1 **7 points**

Principaux domaines abordés : Probabilités conditionnelles et indépendance. Variables aléatoires.

1. R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».

a. Si la case est blanche on tire 1 seul jeton; comme il y a 3 résultats impairs sur 5 numéros on a $P_B(G) = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$.

b. Tout d'abord on a $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et donc $P(R) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.
Si la case est rouge on tire successivement deux jetons : il y a $5 \times 4 = 20$ issues différentes depuis 1–2 jusqu'à 5-4 et parmi celles-ci les issues gagnantes : 1-3; 1-5; 3-1; 3-5; 5-1 et 5-3.
On a donc $P_R(G) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$ (voir l'énoncé).
On peut donc compléter l'arbre pondéré :



2. a. D'après la loi des probabilités totales :
$P(G) = P(B \cap G) + P(R \cap G)$

- $P(B \cap G) = P(B) \times P_B(G) = \frac{1}{3} \times 0,6 = \frac{0,6}{3} = 0,2$;
- $P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G) = \frac{2}{3} \times 0,3 = \frac{0,6}{3} = 0,2$.

Donc $P(G) = 0,2 + 0,2 = 0,4$.

b. Il faut trouver $P_G(B) = \frac{P(G \cap B)}{P(G)} = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{2}{=}0,5$.

3.
- $P(B) \times P(G) = \frac{1}{3} \times 0,4 = \frac{0,4}{3} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$;
- $P(B \cap G) = \frac{1}{3} \times 0,6 = 0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Donc $P(B) \times P(G) \neq P(B \cap G)$: les évènements ne sont pas indépendants.

4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.

   On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

   a. Les 10 épreuves sont indépendantes et à chacune la probabilité de gagner est égale à 0,4. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(10~;~0,4)$.

   b. On a $P(X = 3 = \binom{10}{3} \times 0,4^3 \times (1-0,4)^7 \approx 0,215$ au millième près.

   c. La calculatrice donne $P(X \leqslant 3) \approx 0,3823$, donc $P(X \geqslant 4) \approx 0,6177$, soit 0,618 au millième près.

   Il y a plus de 6 chances sur 10 de gagner au moins 4 parties.

5. **a.** On a $p_n = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,6^n$.

   b. Il faut trouver le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0,99$, soit :

   $1 - 0,6^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,6^n$ soit par croissance de la fonction logarithme :

   $\ln 0,01 \geqslant n \ln 0,6 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,6} \leqslant n$, car $\ln 0,6 < 0$.

   Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,6} \approx 9,02$.

   Il faut donc jouer au moins 10 parties pour avoir une probabilité d'en gagner une avec une probabilité d'au moins 99 %.

EXERCICE 2 — 7 points

Principaux domaines abordés : Suites numériques. Algorithmique et programmation.

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

1. Au bout de 30 min, 10 % de 1 mg ont disparu : il en reste donc 0,9 mg et on donne alors 0,25 mg supplémentaires : on a donc $u_1 = 1,15$.

2. Si u_n est la quantité de médicament présente au bout de n périodes de 30 min, à la $(n+1)^{\text{e}}$ période 10 % auront disparu ; il en restera donc $0,9u_n$ et on donne alors 0,25 mg de médicament supplémentaire ; on a donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.

3. **a.** *Initialisation* Pour $n = 0$. On a $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,15$ soit $u_0 \leqslant u_1 < 5$:l'encadrement est réalisé au rang 0.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

   Alors en multipliant par 0,9 : $0,9u_n \leqslant 0,9u_{n+1} < 0,9 \times 5$ et en ajoutant 0,25 à chaque membre : $0,9u_n + 0,25 \leqslant 0,9u_{n+1} + 0,25 < 0,9 \times 5 + 0,25$, soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 4,75 < 5$.

   On a donc : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 5$: l'encadrement est vrai au rang $(n+1)$.

   L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n, il l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence : pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

   b. La première partie du résultat précédent montre que la suite (u_n) est croissante et la deuxième que cette suite est majorée par 5 : elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant 5$.

4. a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while u < 1.8 :
      u=0.9*u+0.25
      n = n+1
   return n
```

b. Le script renvoie $n = 8$,car $u_8 \approx 1,854 > 1,8$.
Le médicament est réellement efficace après 4 heures.

5. a. On a donc $v_{n+1} = 2,5 - u_{n+1} \iff u_{n+1} = 2,5 - v_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.
Or $v_n = 2,5 - u_n \iff u_n = 2,5 - v_n$; l'égalité précédente devient donc :
$2,5 - v_{n+1} = 0,9\,(2,5 - v_n) + 0,25 \iff 2,5 - v_{n+1} = 2,25 - 0,9v_n + 0,25 \iff v_{n+1} = 0,9v_n$: cette égalité montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 de premier terme $v_0 = 2,5 - u_0 = 2,5 - 1 = 1,5$.

b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, , $v_n = v_0 \times 0,9^n$, soit $v_n = 1,5 \times 0,9^n$, d'où puisque $u_n = 2,5 - v_n$:
Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

c. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $0,9^n < 1$, car $-1 < 0,9 < 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2,5 < 3$.
Conclusion : à aucun moment le traitement ne sera dangereux pour le patient.

Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse

$$f(t) = 2,5 - 1,5\mathrm{e}^{-0,2t},$$

1. 3 h 45 min $= 3 + \dfrac{45}{60} = 3 + \dfrac{3}{4} = 3 + \dfrac{75}{100} = 3 + 0,75 = 3,75$.
On a donc $f(3,75) = 2,5 - 1,5\mathrm{e}^{-0,2\times 3,75} = 2,5 - 1,5 \times \mathrm{e}^{-0,75} \approx 1{,}791 < 1,8$. Le traitement n'est pas efficace au bout de 3 h 45 min.

2. Il faut trouver t tel que $f(t) \geqslant 1,8$, soit
$2,5 - 1,5\mathrm{e}^{-0,2t} \geqslant 1,8 \iff 0,7 \geqslant 1,5\mathrm{e}^{-0,2t} \iff \frac{7}{15} \geqslant \mathrm{e}^{-0,2t}$, soit par croissance du logarithme :
$\ln \frac{7}{15} \geqslant -0,2t \iff -5\ln \frac{7}{15} \leqslant -5 \times (-0,2t)$ car $-5 < 0$, soit enfin $t \geqslant -5\ln \frac{7}{15}$.
Or $-5\ln \frac{7}{15} \approx 3{,}8107$ soit 3 h et $0{,}8107 \times 60 = 48,64$ min soit environ 3 h 49 min.

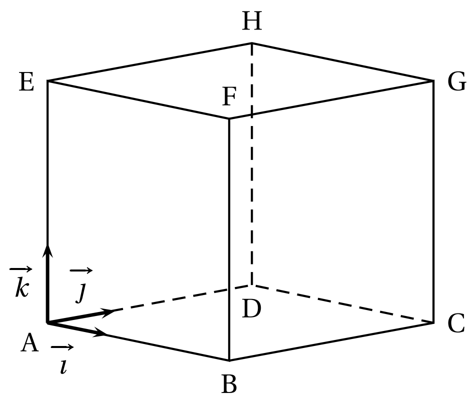
3. Ce temps est inférieur à celui de la question 4. b. La perfusion est donc plus rapidement efficace.

EXERCICE 3 **7 points**

Principaux domaines abordés : Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace. Orthogonalité et distances dans l'espace. Représentations paramétriques et équations cartésiennes.

Le solide ABCDEFGH est un cube. On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel les coordonnées des points B, D et E sont :

$$B(3\,;\,0\,;\,0), D(0\,;\,3\,;\,0) \text{ et } E(0\,;\,0\,;\,3).$$



On considère les points P(0; 0; 1), Q(0; 2; 3) et R(1; 0; 3).

1. Voir l'annexe.
2. On a $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

   Donc $PR^2 = \left\|\overrightarrow{PR}\right\|^2 = 1^2+0^2+2^2 = 1+4 = 5$ et $QR = \left\|\overrightarrow{QR}\right\|^2 = 1^2+(-2)^2+0^2 = 1+4 = 5$.
   Donc $PR = QR = \sqrt{5}$: le triangle (PQR) est isocèle en R.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QR}$ ne sont pas colinéaires donc les points P, Q et R ne sont pas alignés : les points P, Q et R définissent un plan.
4. **a.**
   - $\overrightarrow{PR}\cdot\vec{u} = 2+0-2 = 0$;
   - $\overrightarrow{QR}\cdot\vec{u} = 2-2+0 = 0$.

   Donc le vecteur $\vec{u}\,(2\,;\,1\,;\,-1)$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQR) est normal à ce plan.

   b. On sait qu'alors $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{PQR}) \iff 2x+1y-1z = d,\quad d\in\mathbb{R}$.
   En particulier $P(0\,;\,0\,;\,1)\in(\text{PQR}) \iff 2\times0+1\times0-1\times1 = d \iff -1 = d$.
   On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{PQR}) \iff 2x+y-z = -1$.

   c. Si d est orthogonale au plan (PQR) elle a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$.
   On a donc :

   $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(d) \iff \overrightarrow{EM} = t\vec{u} \iff \left\{\begin{array}{l} x-0 = 2t\\ y-0 = 1t\\ z-3 = -1t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t\\ y &=& t\\ z &=& -t+3\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$.

d. Si L est le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR), la droite (LE) est perpendiculaire à ce plan donc l appartient à (d) et ce point L appartient aussi au plan (PQR). les coordonnées de L vérifient donc le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l}x-0=2t\\y-0=1t\\z-3=-1t\\2x+y-z\quad=\quad-1\end{array}\right., t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{l}x=2t\\y=t\\z=-t+3\\2x+y-z\quad=\quad-1\end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$2\times 2t+t-(-t+3)=-1 \iff 6t-3=-1 \iff 6t=2 \iff t=\dfrac{1}{3}$. L$\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$. On a donc $x=\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{1}{3}$ et $z=3-\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}$.

e. On a donc avec $\overrightarrow{\text{EL}}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, on déduit $\text{EL}^2=\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{6}{9}$.

La distance de E au plan (PQR) est donc égale à $\text{EL}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

5. Si on prend EQR comme base la hauteur est [PE].

On a $\mathscr{A}(EQR)=\dfrac{\text{EQ}\times\text{ER}}{2}=\dfrac{2\times 1}{2}=1$ et PE $=2$, donc :

$V(\text{EPQR})=\dfrac{1}{3}\times 1\times 2=\dfrac{2}{3}$.

6. On a aussi $V(\text{EPQR})=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{PQR})=\times\text{EL}$, soit

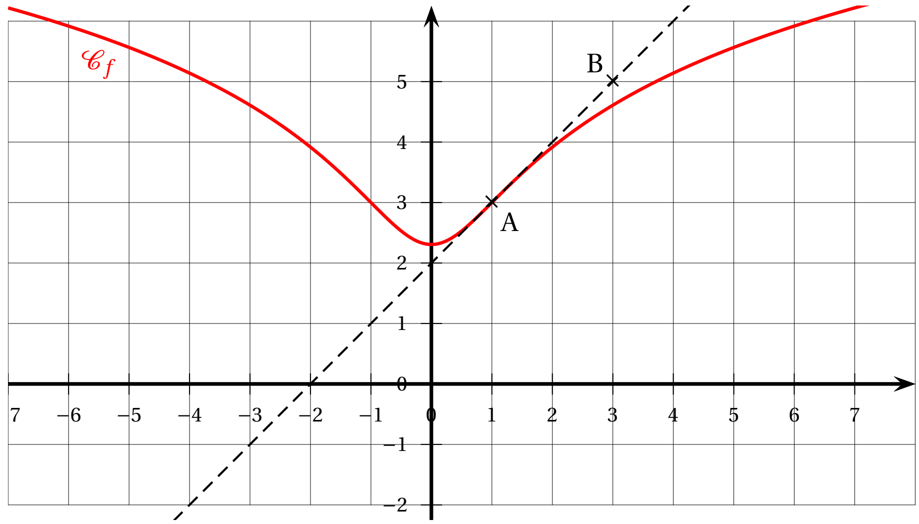
$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{PQR})\times\dfrac{\sqrt{6}}{3} \iff \mathscr{A}(\text{PQR})=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$.

Rem. On peut retrouver cette aire en calculant l'aire de ce triangle isocèle directement

EXERCICE 4 — 7 points

Principaux domaines abordés : Étude de fonctions. Fonction logarithme.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A(1 ; 3) et B(3 ; 5).
On donne ci-dessous $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. On lit sur le graphique : $f(1) = 3$ et $f'(1) = 1$ (nombre dérivé égal au coefficient directeur de la droite (AB)).
2. **a.** Comme $a \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 0$, on a $ax^2 \geqslant 0$, donc $ax^2+1 \geqslant 1 > 0$: la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $f'(x) = \dfrac{2ax}{ax^2+1}$.

   b. Les résultats du 1. peuvent s'écrire :
   $\left\{\begin{array}{l c l} f(1) & = & 3\\ f'(1) & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} \ln(a+1)+b & = & 3\\ \dfrac{2a}{a+1} & = & 1\end{array}\right.$.
   La deuxième équation donne $2a = a+1 \iff a = 1$ et en reportant dans la première :
   $\ln(1+1)+b = 3 \iff b = 3-\ln 2$.
   On a donc sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln 2$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2).$$

1. Quel que soit le réel x, $f(-x) = \ln\left[(-x)^2+1\right]+3-\ln 2 = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2) = f(x)$.
   La fonction f est donc paire (la représentation graphique de f est donc symétrique autour de l'axe des ordonnées).
2. On a $\lim x \to +\infty x^2 = +\infty$ d'où $\lim x \to +\infty x^2+1 = +\infty$ et par composition $\lim x \to +\infty \ln\left(ax^2+1\right) = +\infty$ et enfin $\lim x \to +\infty f(x) = +\infty$.
   La fonction étant paire $\lim x \to -\infty f(x) = \lim x \to +\infty f(x) = +\infty$.

3. Comme $x^2+1>0$ quel que soit le réel x, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle : $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Le dénominateur étant supérieur à zéro le signe de $f('x)$ est donc celui de $2x$, donc : $f'(x)<0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f'(x)>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Conclusion f est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le nombre $f(0)=\ln 1+3-\ln=3-\ln 2$ est donc le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3-\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

4. D'après le tableau de variations l'équation $f(x)=k$ admet deux solutions si $k>3-\ln 2$.

5. $f(x)=3+\ln 2 \iff \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2)=3+\ln(2) \iff \ln\left(x^2+1\right)=2\ln(2) \iff \ln\left(x^2+1\right)=\ln 4 \iff x^2+1=4$ (par croissance de la fonction logarithme), soit $x^2=3$, d'où deux solutions $S=\left\{-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\right\}$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur R par $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2)$.

1. Il semble qu'il y ait deux points d'inflexion aux points d'abscisses -1 et 1.

2. Comme $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ soit le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur étant non nul ; f' est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$f''(x)=\dfrac{2\left(x^2+1\right)-2x\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

3. On a donc $f''(x)=0 \iff 1-x^2=0 \iff \left\{\begin{array}{lcl}1+x&=&0\\1-x&=&\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}x&=&-1\\x&=&1\end{array}\right.$ Donc $S=\{-1\,;\,1\}$.

La dérivée seconde est positive quand le trinôme $1-x^2$ est positif soit sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$. Donc la fonction f est convexe sur $]-1\,;\,1[$.

ANNEXE à rendre avec la copie