

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

5 points

Un commerçant vend deux types de matelas : matelas RESSORTS et matelas MOUSSE.

On suppose que chaque client achète un seul matelas.

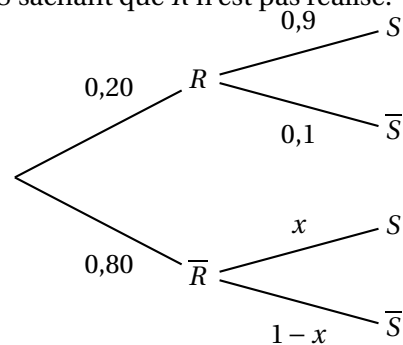
On dispose des informations suivantes :

- 20 % des clients achètent un matelas RESSORTS.
Parmi eux, 90 % sont satisfaits de leur achat.
- 82 % des clients sont satisfaits de leur achat.

Partie A

On note $x = P_{\bar{R}}(S)$, où $P_{\bar{R}}(S)$ désigne la probabilité de S sachant que R n'est pas réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.



2. D'après la loi des probabilités totales : $P(S) = P(R \cap S) + P(\bar{R} \cap S)$ Or :
- $P(R \cap S) = P(R) \times P_R(S) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$ et
 - $P(\bar{R} \cap S) = P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(S) = 0,8 \times x = 0,8x$ et comme $P(S) = 0,82$, on a donc l'équation :
- $$0,18 + 0,8x = 0,82 \iff 0,8x = 0,64 \iff x = 0,8.$$

3. On choisit un client satisfait de son achat.

Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS?

Il faut calculer $P_S(R) = \frac{P(S \cap R)}{P(S)} = \frac{0,18}{0,82} = \frac{18}{82} = \frac{9}{41} \approx 0,219$, soit 0,22 au centième près.

Partie B

1. On choisit 5 clients au hasard.

On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi ces 5 clients.

- a. Les paramètres de la loi binomiale sont $n = 5$ et $p = 0,82$.
 - b. Il faut trouver $P(X \leq 3) \approx 0,2223$, d'après la calculatrice soit 0,222 au millième près.
2. a. On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits de leur achat. La probabilité qu'un acheteur soit satisfait est égale à 0,82, la probabilité que deux acheteurs soient satisfaits est $0,82^2$, ..., la probabilité que les n acheteurs soient satisfaits est égale à $0,82^n$.

b. Il faut donc résoudre dans \mathbb{N} l'inéquation :

$p_n < 0,01 \iff 0,82^n < 0,01 \iff n \ln 0,82 < \ln 0,01$ par croissance de la fonction logarithme népérien soit encore

$n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,82}$. (car $\ln 0,82 < 0$). Or $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,82} \approx 23,2$.

Il faut donc au minimum 24 acheteurs.

Moins de 1 % des acheteurs seront tous satisfaits si leur nombre dépasse 23.

EXERCICE 2

5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Pour $n = 0$, on a $u_1 = \frac{6 \times 8 + 2}{8 + 5} = \frac{50}{13}$.

2.

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

a. Le dénominateur étant supérieur à 4 ne s'annule pas : la fonction f est donc dérivable sur $[0; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{6(x+5) - 1(6x+2)}{(x+5)^2} = \frac{6x+30-6x-2}{(x+5)^2} = \frac{28}{(x+5)^2}$$

quotient de deux nombres supérieurs à zéro cette dérivée est supérieure à zéro : la fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et son minimum est $f(0) = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$.

$$\text{On a } f(2) = \frac{6 \times 2 + 2}{2 + 5} = \frac{14}{7} = 2.$$

Or comme f est croissante sur $[0; +\infty[: x > 2 \implies f(x) > f(2) = 2$ d'après le calcul précédent.

b. *Initialisation* : $u_0 = 8 > 2$: la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2$.

Alors par croissance de la fonction f : $f(u_n) > f(2) = 2$.

Or $f(u_n) = u_{n+1}$: on a donc $u_{n+1} > 2$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n , $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n + 1$. Par le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

a. On a $u_n > 2 \implies u_n + 1 > 2 + 1 > 0$ et $u_n > 2 \implies u_n + 5 > 2 + 5 > 0$.

Le signe du quotient précédent est donc celui de $2 - u_n$; or $u_n > 2 \implies$

$0 > 2 - u_n$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

b. La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 2 est donc convergente vers une limite ℓ , avec $\ell \geq 2$.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

$$\text{a. } v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \frac{8 - 2}{8 + 1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{b. } \text{On sait que } u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}$$

Or $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1}$ et en utilisant la relation précédente :

$$v_{n+1} = \frac{\frac{6u_n + 2}{u_n + 5} - 2}{\frac{6u_n + 2}{u_n + 5} + 1} = \frac{\frac{6u_n + 2 - 2u_n - 10}{u_n + 5}}{\frac{6u_n + 2 + u_n + 5}{u_n + 5}} = \frac{4u_n - 8}{7u_n + 7} = \frac{4(u_n - 2)}{7(u_n + 1)} = \frac{4}{7}v_n.$$

La relation $v_{n+1} = \frac{4}{7}v_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ signifie que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

$$\text{c. } \bullet \text{ On sait qu'alors quel que soit } n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \left(\frac{4}{7}\right)^n \text{ ou encore } v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{7}\right)^n.$$

Or comme $-1 < \frac{4}{7} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$ et par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$ et comme $u_n + 1 > 2 + 1 > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 2 = 0$, soit enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$. Donc $\ell = 2$.

d. On vérifie à la calculatrice que $u_{14} \approx 2,00079$ est le premier terme inférieur à 2,001. Valeur renvoyée : 14.

EXERCICE 3

5 points

On considère le point $A(1; 1; 0)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On considère le plan \mathcal{P} d'équation : $x + 4y + 2z + 1 = 0$.

1. On sait que $M(x; y; z) \in (d) \iff \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Soit } M(v) \in (d) \iff \begin{cases} x - 1 = 0t \\ y - 1 = 2t \\ z - 0 = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. Un point de coordonnées $(x; y; z)$ est commun à la droite (d) et au plan \mathcal{P} si ces coordonnées les équations de la droite et du plan soit le système :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \\ x + 4y + 2z + 1 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$$1 + 4(1 + 2t) + 2 \times (-t) + 1 = 0 \iff 1 + 4 + 8t - 2t + 1 = 0 \iff 6t + 6 = 0 \iff t = -1$$

En remplaçant t par -1 dans les trois équations de (d) , on obtient :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

On a donc $B(1; -1; 1) \in (d) \cap \mathcal{P}$.

3. a. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires puisque les deux premières coordonnées sont égales mais pas les troisièmes ; les points A, B et C non alignés définissent bien le plan (ABC).
- b. On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 + 0 + 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 + 0 + 0 = 0$.
Conclusion : le vecteur \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il est donc normal à ce plan.
- c. On sait qu'alors $M(x; y; z) \in (ABC) \iff x \times 1 + y \times 0 + z \times 0 + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.
Or $A(1; 1; 0) \in (ABC) \iff 1 \times 1 + d = 0 \iff d = -1$.
On a donc $M(x; y; z) \in (ABC) \iff x - 1 = 0$.
4. a. $AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 0^2 + (-2)^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$;
 $AC^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2 = 4 + 1 = 5$.
On a donc $AB^2 = AC^2 \implies AB = AC$: le triangle ABC est isocèle en A.
- b. On a $H\left(\frac{1+1}{2}; \frac{(-1)+(-1)}{2}; \frac{1-1}{2}\right)$ soit $H(1; -1; 0)$.
On a donc $AH^2 = (1-1)^2 + (-1-1)^2 + (0-0)^2 = 4$, d'où $AH = 2$.
ABC étant isocèle en A, la droite (AH) médiane est aussi hauteur relative au côté [BC].
On a donc $\mathcal{A}(ABC) = \frac{BC \times AH}{2}$.
Comme $BC^2 = (1-1)^2 + (-1+1)^2 + (-1-1)^2 = 0 + 0 + 4$, d'où $BC = 2$.
Donc $\mathcal{A}(ABC) = \frac{2 \times 2}{2} = 2$.
5. Soit D le point de coordonnées $(0; -1; 1)$.
- a. Avec $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BD} = -\vec{n}$ qui est un vecteur normal au plan (ABC), donc \overrightarrow{BD} aussi et par conséquent la droite (BD) est une hauteur de la pyramide ABCD.
- b. Pour la pyramide ABCD on prend comme base le triangle (ABC) et comme hauteur le segment [BD], d'où :
 $\mathcal{V}(ABCD) = \frac{\mathcal{A}(ABC) \times [BD]}{3}$.
Avec $BD^2 = \|\overrightarrow{BD}\|^2 = (-1)^2 + 0^2 + 0^2 = 1$, on a donc $BD = 1$ et
 $\mathcal{V}(ABCD) = \frac{2 \times 1}{3} = \frac{2}{3}$ en unité d'aire.

EXERCICE 4

5 points

1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2xe^x$.
La fonction f produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} est dérivable et pour tout réel :
 $f'(x) = 2e^x + 2xe^x = 2e^x(1+x)$. Cette dérivée est du signe de $1+x$.
On a donc $f'(x) < 0 \iff x < -1$: la fonction est décroissante sur $] -\infty; -1]$.
On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $f(-1) = 2 \times (-1) \times e^{-1} = -2e^{-1} \approx -0,74$.

De même $f'(x) > 0 \iff x > -1$: la fonction est croissante sur $[-1 ; +\infty[$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$, la fonction f croît de $f(-1) < -0,73$ à plus l'infini.

La fonction f étant continue car dérivable et strictement croissante prend donc une seule fois la valeur $-0,73$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Réponse **c**.

2.

$$g(x) = \frac{x+1}{e^x}.$$

On a $g(x) = (x+1) \times \frac{1}{e^x}$. Or :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty, \text{ donc par produit de limites : } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty. \text{ Réponse a.}$$

3.

$$h(x) = (4x - 16)e^{2x}.$$

La fonction h produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} est dérivable et pour tout réel :

$$h'(x) = 4e^{2x} + 2(4x - 16)e^{2x} = e^{2x}(4 + 8x - 32) = e^{2x}(8x - 28).$$

$$h''(x) = 8e^{2x} + 2(8x - 28)e^{2x} = e^{2x}(8 + 16x - 56) = e^{2x}(16x - 48) = 16e^{2x}(x - 3).$$

Comme $4e^{2x} > 0$ quel que soit le réel x , le signe de $h''(x)$ est celui de $x - 3$.

Donc la dérivée seconde s'annule en $x = 3$ en changeant de signe, donc le point de coordonnées $(3 ; -4e^6)$ est le seul point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_h . Réponse **b**.

4.

$$k(x) = 3\ln(x) - x.$$

Une équation de T est : $M(x ; y) \in (T) \iff y - k(e) = f'(e)(x - e)$.

Avec $k(e) = 3\ln e - e = 3 - e$ et

$$k'(x) = \frac{3}{x} - 1, \text{ d'où } k'(e) = \frac{3}{e} - 1 = \frac{3-e}{e}, \text{ on obtient donc :}$$

$$M(x ; y) \in (T) \iff y - (3 - e) = \frac{3-e}{e}(x - e) \iff y = \frac{3-e}{e}x - 3 + e + 3 - e \iff y = \frac{3-e}{e}x \text{ (cette droite contient l'origine). Réponse b.}$$

5. $[\ln(x)]^2 + 10\ln(x) + 21 = 0$, avec $x \in]0 ; +\infty[$.

En posant $X = \ln x$, l'équation devient : $X^2 + 10X + 21 = 0$.

Avec $\Delta = 10^2 - 4 \times 21 = 100 - 84 = 16 = 4^2$, les solutions sont :

$$\begin{cases} X_1 = \frac{-10-4}{2} \\ X_2 = \frac{-10+4}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} X_1 = -7 \\ X_2 = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln x_1 = -7 \\ \ln x_2 = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = e^{-7} \\ x_2 = e^{-3} \end{cases}$$

Cette équation a donc deux solutions. Réponse **c**.