∽ Corrigé du baccalauréat LA RÉUNION - 28 mars 2023 ∾

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

— L'entreprise appelle chaque personne une première fois :
- la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,6;
- si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,3.

— Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel :
- la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à $0,3$;
- si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,2.

— Si une personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

On choisit une personne au hasard et on considère les évènements suivants :

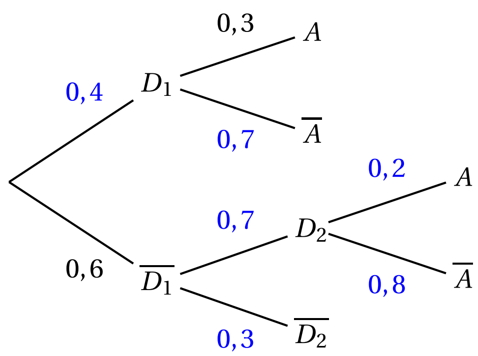
D_1 : « la personne décroche au premier appel »;

D_2 : « la personne décroche au deuxième appel »;

A : « la personne achète le produit ».

Partie A

1. On complète l'arbre pondéré.



2. En utilisant les propriétés de l'arbre pondéré, on a :
$P(A) = P(D_1 \cap A) + P\left(\overline{D_1} \cap D_2 \cap A\right) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \times 0,2 = 0,204$

3. On sait que la personne a acheté le produit.
La probabilité qu'elle ait décroché au premier appel est :
$P_A(D_1) = \dfrac{P(D_1 \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,4 \times 0,3}{0,204} \approx 0,588$

Partie B

On rappelle que, pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à $0,204$.

1. On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.

a. On admet que X suit une loi binomiale; ses paramètres sont $n = 30$ et $p = 0,204$.

b. La probabilité qu'exactement 6 personnes de l'échantillon achètent le produit est :

$P(X = 6) = \binom{30}{6} \times 0,204^6 \times (1 - 0,204)^{30-6} \approx 0,179$

c. L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = np = 30 \times 0,204 = 6,12$.

Donc pour chaque échantillon de 30 personnes, il y en a en moyenne 6,12 qui achètent le produit.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère désormais un échantillon de n personnes.

La plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à 0,99 est le plus petit entier naturel n tel que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$. On résout cette inéquation.

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - P(X = 0) \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant P(X = 0)\\ &\iff 0,01 \geqslant \binom{n}{0} \times 0,204^0 \times (1 - 0,204)^n \iff 0,01 \geqslant 0,796^n\\ &\iff \ln(0,01) \geqslant \ln\left(0,796^n\right) \iff \ln(0,01) \geqslant n\ln(0,796) \iff \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)} \leqslant n \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)} \approx 20,2$ donc la valeur de n cherchée est 21.

EXERCICE 2 — 5 points

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par : $f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x)$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0~;~+\infty[$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. On cherche les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

- On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (3x + 1 - 2x\ln(x)) = 1$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 1$.
- $f(x) = x(3 - 2\ln(x)) + 1$.
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (3 - 2\ln(x)) = -\infty$.
  On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} x(3 - 2\ln(x)) = -\infty$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Sur $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = 3 + 0 - 2 \times \ln(x) - 2x \times \dfrac{1}{x} = 3 - 2\ln(x) - 2 = 1 - 2\ln(x)$.

b. On étudier le signe de f' sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

$f'(x) > 0 \iff 1 - 2\ln(x) > 0 \iff \dfrac{1}{2} > \ln(x) \iff x < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

$f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 1 - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \times \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 1 - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \times \dfrac{1}{2} = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 1 \approx 4,3$.

On en déduit le tableau des variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
Signe de f'	‖	+	0	−	
Variations de f	‖ 1	↗	$2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 1$	↘	$-\infty$

3. **a.** Le maximum de la fonction f vaut $2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 1 > 0$; on complète le tableau des variations de f.

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		α		$+\infty$
Variations de f	1	$\nearrow$	$2e^{\frac{1}{2}}+1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ donc continue sur cet intervalle.

- Sur l'intervalle $\left]-\infty\,,\,e^{\frac{1}{2}}\right[$, la fonction f est strictement positive donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Sur l'intervalle $\left]e^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$, la fonction f est continue et strictement décroissante; elle passe d'une valeur positive à une valeur négative donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur cet intervalle. On l'appelle α.

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0\,;\,+\infty[$, et que cette solution appartient à l'intervalle $\left]e^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$.

b. Le signe de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$ est donné par le tableau :

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		α		$+\infty$
Variations de f	1	$\nearrow$	$2e^{\frac{1}{2}}+1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
Signe de f			$+$		0	$-$	

Donc $f(x) > 0$ sur $]0\,;\,\alpha[$, $f(\alpha) = 0$ et $f(x) < 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

4. On considère une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On la note F.
La fonction F a pour dérivée la fonction f qui est positive sur $\left[e^{\frac{1}{2}}\,;\,\alpha\right[$; donc F est croissante sur cet intervalle, ce qui contredit l'affirmation proposée.

5. **a.** Pour étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$, on calcule la dérivée seconde f'' :
$f''(x) = 0 - 2 \times \dfrac{1}{x} = -\dfrac{2}{x} < 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$; on en déduit que la fonction f est concave sur $]0\,;\,+\infty[$ et que sur cet intervalle, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au dessous des ses tangentes.

b. Soit T la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

- $f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x)$ donc $f(1) = 3 \times 1 + 1 - 2 \times 1 \times \ln(1) = 4$
- $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$ donc $f'(1) = 1 - 2 \times \ln(1) = 1$

Donc T a pour équation $y = 1(x-1) + 4$ soit $y = x + 3$.

c. La courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de ses tangentes donc de la tangente T et donc, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a $f(x) \leqslant x + 3$.

$$f(x) \leqslant x+3 \iff 3x+1-2x\ln(x) \leqslant x+3 \iff 2x-2 \leqslant 2x\ln(x) \iff \frac{2x}{2x} - \frac{2}{2x} \leqslant \ln(x)$$
$$\iff 1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln(x)$$

Donc, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a : $\ln(x) \geqslant 1 - \dfrac{1}{x}$.

EXERCICE 3 — 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$:, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2}n + 1$.

Partie A

1. La valeur de u_2 est égale à :

a. $\dfrac{11}{4}$ **b.** $\dfrac{13}{2}$
c. 3,5 **d.** 2,7

> $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{1}{2}u_0 + \dfrac{1}{2} \times 0 + 1 = \dfrac{5}{2}$
> $u_2 = u_{1+1} = \dfrac{1}{2}u_1 + \dfrac{1}{2} \times 1 + 1 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{5}{4} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{4}{4} = \dfrac{11}{4}$ **Réponse a.**

2. La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n$ est :

a. arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ **b.** géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$
c. constante. **d.** ni arithmétique, ni géométrique.

> $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2}n + 1 - n - 1 = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{1}{2}n = \dfrac{1}{2}(u_n - n) = \dfrac{1}{2}v_n$
> Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. **Réponse b.**

3. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.

n désigne un entier naturel non nul.
On rappelle qu'en langage Python « i in range (n) » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

```
1  def terme (n)
2      U=3
3      for i in range(n) :
4  ......................
5      return U
```

Pour que terme (n) renvoie la valeur de u_n, on peut compléter la ligne 4 par :

a. U = U/2 + (i+1)/2+1 **b.** U = U/2 + n/2 + 1
c. U = U/2 + (i−1)/2+1 **d.** U = U/2 + i/2 + 1

> Pour $i = 0$, il faut calculer u_1 ; la seule formule valable est : U = U/2 + i/2 + 1. **Réponse d.**

Partie B

1. On va démontrer par récurrence pour tout entier naturel n la propriété $\mathcal{P}_n$: $n \leqslant u_n \leqslant n+3$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 0+3$.
  La propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité**
  Supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $n \leqslant u_n \leqslant n+3$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  $n \leqslant u_n \leqslant n+3 \iff \dfrac{1}{2}n \leqslant \dfrac{1}{2}u_n \leqslant \dfrac{1}{2}n + \dfrac{3}{2} \iff \dfrac{1}{2}n + \dfrac{1}{2}n \leqslant \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2}n \leqslant \dfrac{1}{2}n + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}n$

$$\iff n \leqslant \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2}n \leqslant n + \dfrac{3}{2} \iff n+1 \leqslant \dfrac{1}{2}u_n\dfrac{1}{2}n + 1 \leqslant n + \dfrac{3}{2} + 1$$

$$\iff n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+\frac{5}{2}$$

Or $\frac{5}{2} \leqslant 4$, donc on a : $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant (n+1)+3$.

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+3$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$; or pour tout n, on a $n \leqslant u_n$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

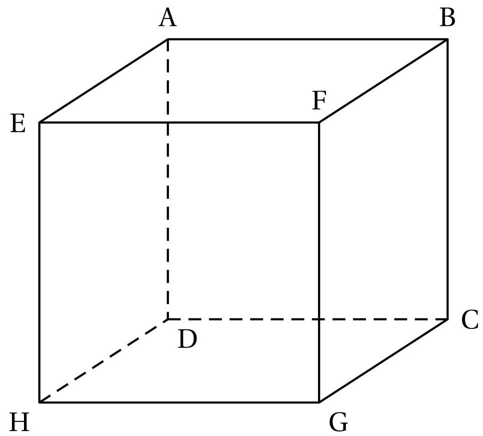
3. Pour tout n, on a $n \leqslant u_n \leqslant n+3$ donc, pour tout n non nul, on a $1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1+\frac{3}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{3}{n} = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

EXERCICE 4 — 5 points

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous tel que AB = 1.
On note M le centre de la face BCGF et N le centre de la face EFGH.



On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{D} ; \overrightarrow{\text{DH}}, \overrightarrow{\text{DC}}, \overrightarrow{\text{DA}}\right)$.

1. On a : $\text{F}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\text{C}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

2. Le point M est le centre de la face BCGF donc c'est le milieu de [CF] ; il a donc pour coordonnées la demi-somme des coordonnées de C et de F :

M a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{x_{\text{C}}+x_{\text{F}}}{2}\\ \frac{y_{\text{C}}+y_{\text{F}}}{2}\\ \frac{z_{\text{C}}+z_{\text{F}}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{0+1}{2}\\ \frac{1+1}{2}\\ \frac{0+1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Le point N est le centre de la face EFGH donc c'est le milieu de [FH] ; il a donc pour coordonnées la demi-somme des coordonnées de F et de H :

N a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{x_{\text{F}}+x_{\text{H}}}{2}\\ \frac{y_{\text{F}}+y_{\text{H}}}{2}\\ \frac{z_{\text{F}}+z_{\text{H}}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1+1}{2}\\ \frac{1+0}{2}\\ \frac{1+0}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

3. **a.** Le plan (HFC) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{CF}$ car les points H, F et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{HF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-1\\1-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-0\\1-1\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HF}=1\times 0+1\times 1+(-1)\times 1=0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{HF}$

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CF}=1\times 1+1\times 0+(-1)\times 1=0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{CF}$

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (HFC) donc c'est un vecteur normal à ce plan.

b. Le plan (HFC) passe par le point F et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AG}$, c'est donc l'ensemble des points X de coordonnées $(x\,,\,y\,,\,z)$ tels que $\overrightarrow{FX}\perp\overrightarrow{AG}$.

$\overrightarrow{FX}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FX}\perp\overrightarrow{AG}\iff\overrightarrow{FX}\cdot\overrightarrow{AG}=0\iff(x-1)\times 1+(y-1)\times 1+(z-1)\times(-1)=0$

$\iff x-1+y-1-z+1=0\iff x+y-z-1=0$

Le plan (HFC) a donc pour équation cartésienne : $x+y-z-1=0$.

4. La droite (AG) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AG}\ (1\,,\,1\,,\,-1)$ et passe par le point A de coordonnées $(0\,,\,0\,,\,1)$; elle a donc pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl}x&=&x_A+1\times t\\y&=&y_A+1\times t\\z&=&z_A+(-1)\times t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}\quad\text{soit}\left\{\begin{array}{rcl}x&=&t\\y&=&t\\z&=&1-t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$$

5. Soit R le projeté orthogonal de G sur le plan (HFC). donc R appartient au plan (HFC).

De plus, comme la droite (AG) est orthogonale au plan (HFC), le point R appartient à la droite (AG).

Les coordonnées de R vérifient donc le système : $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&t\\y&=&t\\z&=&1-t\\x+y-z-1&=&0\end{array}\right.$

On a donc $t+t-(1-t)-1=0$ donc $3t=2$ donc $t=\dfrac{2}{3}$.

Donc R a pour coordonnées $x_R=t=\dfrac{2}{3}$, $y_R=t=\dfrac{2}{3}$, $z_R=1-t=\dfrac{1}{3}$, soit $\left(\dfrac{2}{3}\,,\,\dfrac{2}{3}\,,\,\dfrac{1}{3}\right)$.

6. Une représentation paramétrique de la droite (FG) est : $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&1\\y&=&1\\z&=&t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$.

On cherche un point K sur la droite (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.

K est un point de (FG) donc ses coordonnées sont de la forme $(1\,,\,1\,,\,t)$.

De plus, le triangle KMN est rectangle en K donc $\overrightarrow{MK}\perp\overrightarrow{NK}$ donc $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{NK}=0$.

$\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\\1-1\\t-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\t-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NK}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-1\\1-\frac{1}{2}\\t-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\t-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{NK}=0\iff\dfrac{1}{2}\times 0+0\times\dfrac{1}{2}+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(t-\dfrac{1}{2}\right)=0\iff\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2=0\iff t=\dfrac{1}{2}$

Le point K a donc pour coordonnées $\left(1\,,\,1\,,\,\dfrac{1}{2}\right)$.

7. Le tétraèdre FNKM a pour hauteur [FK] et pour base le triangle KMN.

- F a pour coordonnées $(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$ et K a pour coordonnées $\left(1\ ,\ 1\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$; donc $\text{FK} = \dfrac{1}{2}$.
- L'aire du triangle rectangle KMN est $\dfrac{\text{KM} \times \text{KN}}{2}$.
  - M $\left(\dfrac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$ et K $\left(1\ ,\ 1\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$ donc $\text{KM} = \dfrac{1}{2}$
  - N $\left(1\ ,\ \dfrac{1}{2}\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$ et K $\left(1\ ,\ 1\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$ donc $\text{KN} = \dfrac{1}{2}$

  L'aire du triangle KMN est donc $\dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{8}$.
- Le volume d'un tétraèdre est, en unité de volume : $\dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

  Le volume du tétraèdre FNKM est donc : $\dfrac{(\text{aire de KMN}) \times \text{FK}}{3} = \dfrac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}}{3} = \dfrac{1}{48}$.

Le volume du cube est 1, celle du tétraèdre FNKM est $\dfrac{1}{48}$ donc le volume du tétraèdre représente un quarante-huitième du volume du cube.