∽ Corrigé du baccalauréat Polynésie 13 mars 2023 ∾

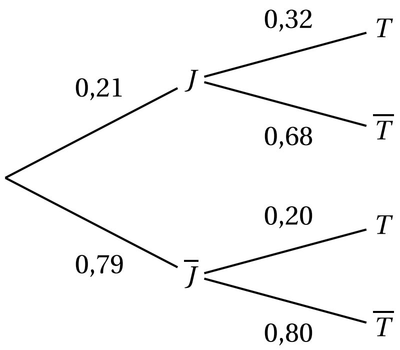
Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 4 points **Thème : probabilités**

Partie A

La situation peut se traduire par l'arbre pondéré suivant :



1. On calcule : $p(J \cap T) = p(J) \times p_J(T) = 0,21 \times 0,32 = 0,0672$.

2. On a de même $p\left(\overline{J} \cap T\right) = p\left(\overline{J}\right) \times p_{\overline{J}}(T) = 0,79 \times 0,20 = 0,158$.

   D'après la loi des probabilités totales :

   $p(T) = p(J \cap T) + p\left(\overline{J} \cap T\right) = 0,0672 + 0,158 = 0,2252$.

3. Il faut trouver la probabilité conditionnelle :

   $p_T(J) = \dfrac{p(T \cap J)}{p(T)} = \dfrac{p(J \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,0672}{00,2252} \approx 0,298$, soit 0,30 au centième près.

Partie B

1. On suppose que la population de la ville est assez importante pour que la sélection de 120 personnes puisse être assimilé à un tirage avec remise de 120 personnes chacune d'elles ayant une probabilité d'avoir moins de 35 ans de 0,30.

   La loi de probabilité de X suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(120\ ;\ 0,30)$.

2. La calculatrice donne $p(X \geqslant 50) = 1 - p(X \leqslant 49) \approx 0,0044$.

EXERCICE 2 5 points **Thème : géométrie dans l'espace**

1. **a.** L'équation paramétrique de d_2 montre qu'elle contient le point de coordonnées $(-3\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et de vecteur directeur dont les composantes sont les coefficients de k donc $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

   b. Les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

c. Une représentation paramétrique de la droite d_1 est $\left\{\begin{array}{l c l}x &= 2+t\\ y &= & 3-t\\ z &= & t\end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$

S'il existe un point commun aux deux droites, il doit donc exister des réels k et t tels que :

$\left\{\begin{array}{l c l c l}x &=& 2+t &=& 2k-3\\ y &=& 3-t &=& k\\ z &=& t &=& 5\end{array}\right.$

La dernière équation donne $t = 5$, puis la deuxième $k = 3-5 = -2$ et en remplaçant dans la première $2+5 = -4-3$: cette égalité est fausse, donc d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

d. Les droites n'étant ni sécantes ni parallèles elles ne sont pas coplanaires.

2. **a.** On a $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} = -1-2+3 = 0$;
de même $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = -2+2+0 = 0$, donc le vecteur $\overrightarrow{w}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

b. Un point commun au plan P et à la droite d_2 a ses coordonnées qui vérifient le système :

$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 2k-3\\ y &=& k\\ z &=& 5\\ 5x+4y-z-22 &=& 0\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$, d'où en remplaçant x, y, z dans la dernière équation :

$5(2k-3)+4(k)-5-22 = 0 \iff 10k-15+4k-27 = 0 \iff 14k = 42 \iff 7k = 21 \iff k = 3.$

Le point commun au plan P et à la droite d_2 a pour coordonnées (6 - 3 ; 3 ; 5) soit M(3 ; 3 ; 5).

3. **a.** Δ et d_1 ont leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}$ orthogonaux donc ces droites sont orthogonales.

Ces deux droites sont sécantes s'il existent des réels t et r tels que

$\left\{\begin{array}{l c l c l}x &=& 2+t &=& -r+3\\ y &=& 3-t &=& 2r+3\\ z &=& t &=& 3r+5\end{array}\right., t, r \in \mathbb{R}.$

La dernière équation $t = 3r+5$ donne en remplaçant dans la deuxième :

$3-3r-5 = 2r+3 \iff -5 = 5r \iff r = -1$, d'où $t = 5-3 = 2$ et en remplaçant dans la première équation on obtient $2+2 = 1+3$, égalité vraie.

Δ et d_1 sont sécantes au point L(4 ; 1 ; 2)

b. Conclusion : on a trouvé une droite Δ perpendiculaire commune aux deux droites d_1 et d_2.

EXERCICE 3 5 points — Thème : fonction exponentielle, algorithmique

1. **Affirmation :** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$ est convexe.

   f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   On a $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, puis $f''(x) = \mathrm{e}^x$.

   On sait que $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit x, donc f est convexe sur $\mathbb{R}$. l'affirmation est vraie.

2. **Affirmation :**L'équation $(2\mathrm{e}^x - 6)(\mathrm{e}^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution dans $\mathbb{R}$.

   Cette équation se traduit par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2\mathrm{e}^x - 6 & = & 0 \quad \text{ou} \\ \mathrm{e}^x + 2 & = & 0 \end{array}\right.$$

- On sait (voir ci-dessus) que $\mathrm{e}^x > 0 \Rightarrow \mathrm{e}^x + 2 > 2 > 0$. Donc la deuxième équation n'a pas de solution.
- $2\mathrm{e}^x - 6 = 0 \iff 2\mathrm{e}^x = 6 \iff \mathrm{e}^x = 3 \iff x = \ln 3$, par croissance de la fonction logarithme népérien : c'est la seule solution donc l'affirmation est vraie.

3. **Affirmation :**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x - x} = 0.$$

On a $\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}\left(1 - \mathrm{e}^{-2x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1 - x\mathrm{e}^{-x}\right)} = \mathrm{e}^x \dfrac{\left(1 - \mathrm{e}^{-2x}\right)}{\left(1 - x\mathrm{e}^{-x}\right)}$.

- Au numérateur on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-2x} = 1$;
- Au dénominateur $x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ et l'on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x\mathrm{e}^{-x} = 1$.

Le quotient a pour limite 1 et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, on a finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x - x} = +\infty$: l'affirmation est fausse.

4. La fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$F'(x) = 2\mathrm{e}^{3x} + 3(2x+1)\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}(2 + 6x + 3) = (6x+5)\mathrm{e}^{3x} = f(x)$.

D'autre part $F(0) = 1\mathrm{e}^0 + 4 = 1 + 4 = 5$

F est donc la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 5 quand $x = 0$, l'affirmation est vraie.

5. L'execution donne $\dfrac{1 + 9 + \ldots + 5}{10} = \dfrac{50}{10} = 5$.

L'affirmation est fausse.

EXERCICE 4 6 points — Thème : suites, fonctions

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. **a.** Démonstration par récurrence :

Initialisation : On a bien $u_0 = 2 \times 0,9^0 - 3 = 2 - 3 = -1$: la relation est vraie au rang 0 ;

Hérédité : On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

Alors par définition de la suite $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$ ou $u_{n+1} = 0,9(2 \times 0,9^n - 3) - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 2,7 - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 3$.

La relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence :

$$u_n = 2 \times 0,9^n - 3,\ n \in \mathbb{N}.$$

b. On sait que $0 < 0,9 < 1$ implique que $0 < 0,9^n \leqslant 1$ puis en multipliant par $2 > 0$,
$0 < 2 \times 0,9^n \leqslant 2$ et enfin en ajoutant à chaque membre le nombre -3 :
$-3 < 0,9^n - 3 \leqslant -1$, soit $-3 < u_n \leqslant -1$.

c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n - 0,3 - u_n = -0,1u_n - 0,3$.
Or l'encadrement trouvé précédemment $-3 < u_n < -1$ donne par produit par $-0,1$,
$0,1 < -0,1u_n < 0,3$ et en retranchant $0,3$, $-0,2 - 0,1u_n - 0,3 < 0$.
Conclusion : quel que soit le naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est donc décroissante.

d. La suite (u_n) décroissante et minorée par -3 converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant -3$.
D'autre part de l'égalité $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$, sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$. La suite (u_n) converge vers -3.

2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\,;\,-1]$ par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$

a. Justifications :

- $-3 < x \leqslant -1 \Rightarrow -1,5 < 0,5x \leqslant -0,5 \Rightarrow 0 < 0,5x + 1,5 \leqslant 1$. Donc la fonction est définie sur $]-3\,;\,-1]$
- La fonction g est dérivable sur $]-3\,;\,-1]$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = \dfrac{0,5}{0,5x+1,5} - 1 = \dfrac{0,5 - 0,5x - 1,5}{0,5x+1,5} = \dfrac{-0,5x-1}{0,5x+1,5}$.

On a vu ci-dessus que $0,5x + 1,5 > 0$, le signe de $g'(x)$ est donc celui de $-0,5x - 1$:

- $g'(x) = 0 \iff -0,5x - 1 = 0 \iff -1 = 0,5x \iff -2 = x$;
- $g'(x) > 0 \iff -0,5x - 1 > 0 \iff -1 > 0,5x \iff -2 > x$;
- $g'(x) < 0 \iff -0,5x - 1 < 0 \iff -1 < 0,5x \iff -2 < x$;

Conclusion : la fonction est croissante sur $]-3\,;\,-2]$ et décroissante sur $[-2\,;\,-1]$.

- On a $\lim\limits_{x\to-3} \ln(0,5x+1,5) = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-3} g(x) = -\infty$
- $g(-1) = \ln(-0,5 + 1,5) - (-1) = 0 + 1 = 1$;
- $g(-2) = \ln(-1 + 1,5) - (-2) = 2 + \ln 0,5 = 2 + \ln\dfrac{1}{2} = 2 - \ln 2 \approx 1,31$.

b. D'après le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $]-3\,;\,-2]$, la fonction g est strictement croissante de moins l'infini à $g(-2) > 0$ et est continue sur cet intervalle : il existe donc un réel unique
$\alpha \in]-3\,;\,-2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
La calculatrice donne :
$g(-2,9) \approx -0,957$ et $g(-2,8) \approx 0,4974$, d'où $-2,9 < \alpha < -2,8$;
$g(-2,89) \approx -0,01$ et $g(-2,88) \approx 0,067$, d'où $-2,89 < \alpha < -2,88$;
$g(-2,889) \approx -0,002$ et $g(-2,888) \approx 0,006$, d'où $-2,889 < \alpha < -2,888$.

3. **a.** Que que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(0,5u_n + 1,5)$ et en utilisant la formule du **1. a.**, $v_n = \ln(0,5(2\times 0,9^n - 3) + 1,5) = \ln(0,9^n - 1,5 + 1,5) = \ln 0,9^n = n\ln 0,9$.
L'égalité $v_n = n\ln 0,9$, montre que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\ln 0,9$.

b. On a $u_n = v_n \iff u_n = \ln(0,5u_n + 1,5) \iff \ln(0,5u_n + 1,5) - u_n = 0 \iff g(u_n) = 0$.

c. On a donc $g(u_n) = 0 \iff u_n = \alpha$, soit $2 \times 0,9^n - 3 = \alpha$.
Or on a vu que $-2,889 < \alpha < -2,888$: on en déduit que $-2,889 < 2\times 0,9^n - 3 < -2,888$, soit en ajoutant 3 :
$0,111 < 2 \times 0,9^n < 0,112 \iff 0,0555 < 0,9^n < 0,0556$ soit par croissance du logarithme népérien $\ln 0,0555 < n\ln 0,9 < \ln 0,0556$ et enfin $\dfrac{\ln 0,0556}{\ln 0,9} < n < \dfrac{\ln 0,0555}{\ln 0,9}$ (car $\ln 0,9 < 0$).
Or $\dfrac{\ln 0,0556}{\ln 0,9} \approx 27,4$ et $\dfrac{\ln 0,0555}{\ln 0,9} \approx 27,5$.
On aurait donc un entier n tel que $27,4 < n < 27,5$. Donc n ne peut être un naturel.
Conclusion : il n'existe pas k tel que $u_k = \alpha$.

d. On a vu que $u_n = \alpha \iff g(u_n) = 0 \iff u_n = v_n$. On vient de voir que ceci n'est pas possible : il n'existe pas $k \in \mathbb{N}$ tel que $v_k = u_k$.