

∞ Corrigé du baccalauréat Centres étrangers 10 juin 2021 ∞

Candidats libres Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Question 1 :

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x^2 + 2x - \frac{3}{x}$ .

Si  $T$  est la tangente à la courbe représentative de  $g$  au point d'abscisse 1, on sait que :

$$M(x; y) \in T \iff y - g(1) = g'(1)(x - 1).$$

$g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et sur cet intervalle :  $g'(x) = 2x + 2 + \frac{3}{x^2}$

$$\text{On a donc } g'(1) = 2 + 2 + \frac{3}{1} = 7;$$

$$\text{D'autre part } g(1) = 1^2 + 2 \times 1 - \frac{3}{1} = 0.$$

$$\text{On a donc : } M(x; y) \in T \iff y - 0 = 7(x - 1) \iff y = 7x - 7. \text{ Réponse a.}$$

Question 2 :

Pour  $n$  assez grand, on a  $n \neq 0$ , donc  $v_n = \frac{3}{1 + \frac{2}{n}}$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$ . Réponse b.

Question 3 :

Si  $X$  est la variable aléatoire correspondant au nombre de boules noires tirées, l'expérience correspond à une loi de Bernoulli et  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = 0,6$ .

On sait que  $p(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,6^4 \times (1 - 0,6)^6 \approx 0,11147 \approx 0,1115$  à  $10^{-4}$  près. Réponse c.

Question 4 :

On a pour  $x \neq 0$ ,  $f(x) = x \left( 3 \frac{e^x}{x} - 1 \right)$ .

Or on sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = +\infty$  et par produit de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ Réponse b.}$$

Question 5 :

Le nombre de codes différents est donc  $36^8 = 2821\,109\,907\,456$ .

Il faut donc  $\frac{2821\,109\,907\,456}{10^8} \approx 28211$  (s) ou  $\approx 478,2$  (min) ou  $\approx 7,8$  (h). Réponse b.

EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

1. a. Retrancher 2 % c'est multiplier par  $1 - \frac{2}{100} = 1 - 0,02 = 0,98$ .

D'une année sur l'autre on multiplie le nombre de panneaux par 0,98 puis on augmente de nombre de panneaux de 250.

- b.** Avec la calculatrice il suffit de taper 10 560 Entrée puis  $\times 0,98 + 50$ .  
Entrée donne  $u_1 \approx 10599$ , les appuis successifs de Entrée donnent  $u_2, u_3$ , etc.  
On obtient  $u_{68} \approx 12009$ .  
le nombre de panneaux dépassera 12 000 au bout de 68 ans soit en 2088.
- c.** Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable  $n$  à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```

u = 10560
n = 0
while u ≤ 12000 :
    u = 0,98 * u + 250
    n = n + 1

```

- 2.** *Initialisation* :  $u_0 = 10560 \leq 12500$  : la proposition est vraie au rang 0.  
*Hérédité* : soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n \leq 12500$  soit en multipliant par 0,98 :  
 $0,98u_n \leq 0,98 \times 12500$  et en ajoutant 250 à chaque membre :  
 $0,98u_n + 250 \leq 0,98 \times 12500 + 250$  ou  $u_{n+1} \leq 12250 + 250$  et finalement  $u_{n+1} \leq 12500$  : la proposition est vraie au rang  $n + 1$ .  
La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang  $n \in \mathbb{N}$  elle est vraie au rang  $n + 1$  : d'après le principe de la récurrence la proposition  $u_n \leq 12500$  est vraie pour tout naturel  $n \in \mathbb{N}$ .
- 3.** On a pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = 0,98u_n + 250 - u_n = 250 - 0,02u_n$ .  
Or d'après le résultat précédent :  
 $u_n \leq 12500 \Rightarrow 0,02u_n \leq 0,02 \times 12500$  ou encore  $0,02u_n \leq 250$  ou en ajoutant à chaque membre  $-0,02u_n$  :  
 $0 \leq 250 - 0,02u_n$  ; on a donc démontré que  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ , ce qui signifie que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- 4.** La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 12 500 : elle est donc convergente vers une limite  $\ell$ , telle que  $\ell \leq 2500$ .
- 5.**
- a.** Quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = u_{n+1} - 12500 = 0,98u_n + 250 - 12500$ , soit  
 $v_{n+1} = 0,98u_n - 12250 = 0,98u_n - 12250 \times \frac{0,98}{0,98} = 0,98u_n - 12500 \times 0,98 = 0,98(u_n - 12500)$  soit enfin  $v_{n+1} = 0,98v_n$  : cette relation vraie quel que soit  $n \in \mathbb{N}$  montre que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,98 de premier terme  $v_0 = u_0 - 12500 = 10560 - 12500 = -1940$ .
- b.** On sait qu'alors quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = v_0 \times 0,98^n$ , soit  $v_n = -1940 \times 0,98^n$ .
- c.** Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - 12500 \iff u_n = v_n + 12500 = 12500 - 1940 \times 0,98^n$ .
- d.** Comme  $0 < 0,98 < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,98^n = 0$ , donc  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12500$   
Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

## Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

1. La fonction  $f$  est une somme de fonctions dérivables sur  $[0 ; +\infty[$  et sur cet intervalle :

$$f'(x) = -0,02 \times (-500)e^{-0,02x+1,4} = 10e^{-0,02x+1,4}.$$

Comme la fonction exponentielle est strictement positive, on en déduit que  $f'(x) > 0$  : la fonction est donc strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$

2. On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-0,02x+1,4} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 500e^{-0,02x+1,4} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 12500$ .

3. Il faut résoudre l'inéquation :

$$12500 - 500e^{-0,02x+1,4} > 12000 \iff 500 > 500e^{-0,02x+1,4} \iff 1 > e^{-0,02x+1,4} \iff e^0 \geq e^{-0,02x+1,4}, \text{ soit par croissance de la fonction exponentielle :}$$

$$0 > -0,02x + 1,4 \iff 0,02x > 1,4 \text{ et en multipliant chaque membre par } 50 :$$

$x > 70$  : il faut donc attendre 71 ans pour que le nombre de panneaux dépasse 12 000, soit en 2091.

**EXERCICE 3**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE et J est un point du segment [CG].

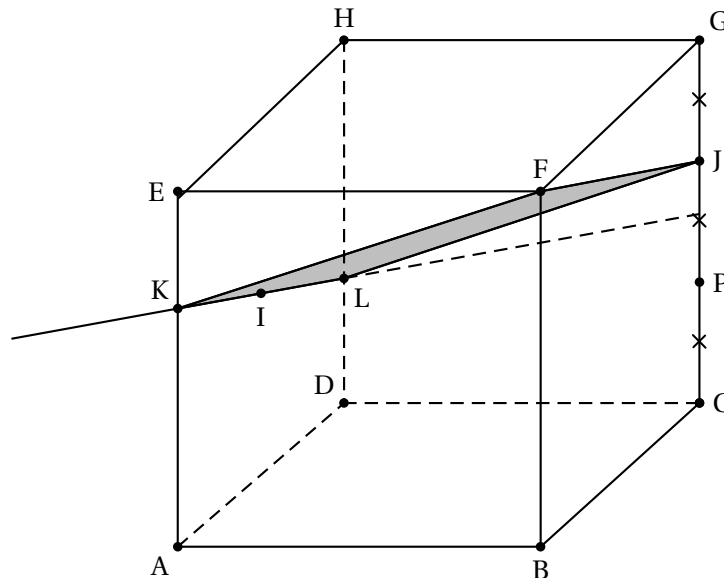
Il existe donc  $a \in [0 ; 1]$  tel que  $\vec{CJ} = a\vec{CG}$ .

On note  $(d)$  la droite passant par I et parallèle à (FJ).

On note K et L les points d'intersection de la droite  $(d)$  et des droites (AE) et (DH).

On se place dans le repère  $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ .

**Partie A : Dans cette partie  $a = \frac{2}{3}$**



1. Dans le repère  $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ ,  $F(1; 0; 1)$ , I milieu de [AH] et de [DE], donc  $I(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$  et  $J(1; 1; \frac{2}{3})$

2. On a  $M(x; y; z) \in (d) \iff$  il existe  $t \in \mathbb{R}$ , tel que  $\overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{FJ}$ .

Avec  $\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-\frac{1}{2} \\ z-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ , on a donc

$$M(x; y; z) \in (d) \iff \begin{cases} x &= t \times 0 \\ y-\frac{1}{2} &= t \times 1 \\ z-\frac{1}{2} &= t \times (-\frac{1}{3}) \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= \frac{1}{2} + t \\ z &= \frac{1}{2} - \frac{t}{3} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. a. Le point K est le point de  $(d)$  d'ordonnée nulle, soit  $t + \frac{1}{2} = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$ . Sa cote est donc  $z = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .

Donc  $K(0; 0; \frac{2}{3})$ .

b. Tous les points de  $(d)$  ont une ordonnée égale à 1.

Or un point de  $(d)$  a une ordonnée égale à  $\frac{1}{2} + t = 1 \iff t = \frac{1}{2}$ .

Enfin L a une cote égale à  $z = \frac{1}{2} - \frac{t}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

$L(0; 1; \frac{1}{3})$ .

4. a. Le milieu de  $[FL]$  a pour coordonnées  $(\frac{1+0}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{1+\frac{1}{3}}{2})$ , soit  $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3})$ .

Le milieu de  $[JK]$  a pour coordonnées  $(\frac{0+1}{2}; \frac{1+0}{2}; \frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{2})$ , soit  $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3})$ .

Conclusion : les diagonales de  $FJLK$  ont le même milieu :  $FJLK$  est un parallélogramme.

b. On a  $\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Donc  $\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = 1 - 1 + 0 = 0$  : les vecteurs sont orthogonaux, les diagonales du parallélogramme sont perpendiculaires, donc  $FJLK$  est un losange.

c. On a  $\overrightarrow{KF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ , donc  $\overrightarrow{KF} \cdot \overrightarrow{FJ} = 0 + 0 - \frac{1}{9} \neq 0$  : les vecteurs ne sont pas

orthogonaux, donc les côtés consécutifs  $[KF]$  et  $[FJ]$  ne sont pas perpendiculaires, donc  $FJLK$  n'est pas un rectangle, donc pas un carré.

### Partie B : Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont :  $K(0; 0; 1 - \frac{a}{2})$  et  $L(0; 1; \frac{a}{2})$ .

On rappelle que  $a \in [0; 1]$ .

1. On sait que J est défini par  $\overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG}$ .

On a avec  $G(1; 1; 1)$ ,  $\overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; donc  $a\overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ , donc  $\overrightarrow{CJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$  et comme C a pour coordonnées  $(1; 1; 0)$ , on en déduit que J a pour coordonnées  $(1; 1; a)$ .

$$2. \text{ On a } \overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix}.$$

Donc  $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{KL} \iff$  FJLK est un parallélogramme.

$$3. \text{ On a } \overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{a}{2}-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1-\frac{3a}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = 1 - 1 + \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right).$$

$$\text{On a } \overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = 0 \iff \begin{cases} \frac{a}{2} - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ 1 - \frac{3a}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a}{2} = 1 \\ \text{ou} \\ 1 = \frac{3a}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ \text{ou} \\ \frac{2}{3} = a \end{cases}$$

La seule solution de l'intervalle  $[0; 1]$  est  $\frac{2}{3}$ , la valeur particulière de la partie A.

Dans ce cas le produit scalaires étant nul, les vecteurs sont orthogonaux, donc les droites sont particulières : les diagonales du parallélogramme étant perpendiculaires, le quadrilatère FJLK est un losange.

4. On a vu dans la question précédente que seule la valeur  $\frac{2}{3}$  de  $a$  donnait un losange FJLK et dans la question 4. c. on a vu qu'alors le losange n'était pas un carré.

#### EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT

5 points

**Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B**

**Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.**

#### EXERCICE A - Fonction ln

##### Partie A :

1. + Si le test est négatif on aura fait un test :  $X_n = 1$  ;  
 + Si le test est positif il faudra faire le test des  $n$  personnes plus le test global :  $X_n = 1 + n$ .
2.  $P(X_n = 1)$  est la probabilité que l'on ne fasse qu'un test : le test des  $n$  personnes et que celui-ci soit négatif donc que les  $n$  personnes ne soient pas malades.  
 La probabilité qu'une personne soit malade est égale à 0,05, donc qu'une personne soit saine  $1 - 0,05 = 0,95$  et donc que  $n$  personnes soient saines est égale à  $0,95^n$ .  
 Donc  $P(X_n = 1) = 0,95^n$ .

On a donc  $P(X_n = n + 1) = 1 - 0,95^n$

$x_i$	1	$n + 1$
$P(X_n = x_i)$	$0,95^n$	$1 - 0,95^n$

3. On a  $E(X_n) = 1 \times 0,95^n + (n + 1) \times (1 - 0,95^n) = 0,95^n + (n + 1) - 0,95^n(n + 1) = 0,95^n + n + 1 - n \times 0,95^n - 0,95^n = n + 1 - n \times 0,95^n$ .

Cette espérance représente le nombre moyen d'analyses à effectuer pour un échantillon  $n$  personnes : cette espérance est voisine de  $n$ .

**Partie B :**

1.  $f(x) = \ln(x) + x \ln(0,95)$ .

$f$  est une somme de fonctions dérivables sur  $]20; +\infty[$  et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \ln(0,95).$$

$$\text{Or } 20 \leq x \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{x} + \ln 0,95 \leq \frac{1}{20} + \ln 0,95.$$

Or  $\frac{1}{20} + \ln 0,95 \approx -0,001$ ; il en résulte que  $f'(x) \leq 0$  : la fonction  $f$  est décroissante sur  $]20; +\infty[$ .

2. On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

$$\text{On a puisque } x \neq 0, \quad f(x) = x \left( \frac{\ln x}{x} + \ln 0,95 \right).$$

$$\text{Puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \ln 0,95 = \ln 0,95 < 0.$$

Finalement par produit de limites puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \ln 0,95 = \ln 0,95 < 0$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

3. La question précédente montre que  $f$  est décroissante de  $f(20) = \ln 20 + 20 \ln 0,95 \approx 1,97$  à moins l'infini.

$f$  est continue car dérivable sur  $]20; +\infty[$  et prend ses valeurs dans les l'intervalle  $] -\infty; f(20) ]$  avec  $f(20) \approx 1,97$ .

Comme  $0 \in ] -\infty; f(20) ]$ , et que  $f$  est décroissante sur cet intervalle il existe donc un réel unique  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

La calculatrice donne  $f(87,0) \approx 0,003$  et  $f(87,1) \approx -0,0005$ , donc  $87,0 < \alpha < 87,1$ .

4. D'après la question précédente :

$$f(x) > 0 \text{ sur } ]20; \alpha[ \text{ et } f(x) < 0 \text{ sur } ]\alpha; +\infty[.$$

**Partie C :**

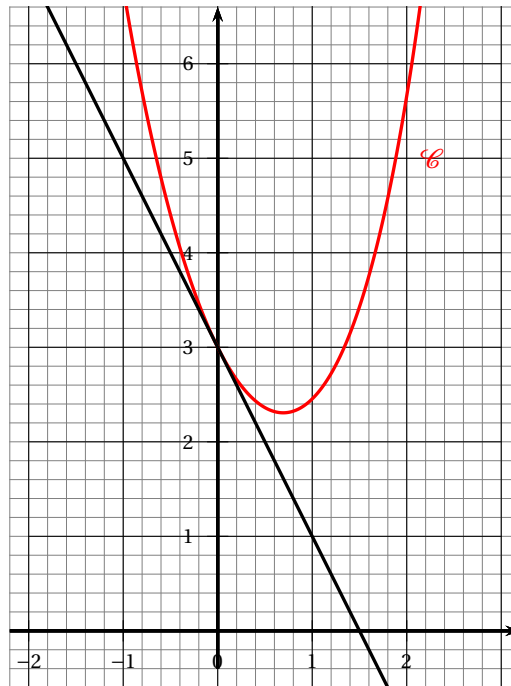
On a  $E(X_n) < n \iff n+1 - n \times 0,95^n < n \iff 1 < n \times 0,95^n$  ou en prenant le logarithme népérien  $0 < \ln n + \ln(0,95^n) \iff 0 < \ln n + n \ln 0,95 \iff 0 < f(n) \iff f(n) > 0$ .

Or on a vu à la fin de la partie B que la fonction  $f$  est positive sur l'intervalle  $]20; 87]$ .

Conclusion : tester toutes les personnes conduira à moins d'analyses qu'avec la méthode 1 avec des échantillons de 20 à 87 personnes au maximum. Au delà il vaut mieux utiliser la première méthode.

**EXERCICE B - Équation différentielle****Partie A : Détermination d'une fonction  $f$  et résolution d'une équation différentielle**

$$f(x) = e^x + ax + be^{-x}$$



1. +  $f(0) \approx 3$ ;  
+  $f'(0) \approx -2$  (coefficient directeur de la tangente)
2. On a  $f(0) = 1 + b$ . Or  $1 + b = 3 \iff b = 2$ .
3. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.
  - a. Sur  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = e^x + a - be^{-x} = e^x + a - 2e^{-x}$ .
  - b. Donc  $f'(0) = 1 + a - 2 = a - 1$ .
  - c. On a vu que  $f'(0) = -2 = a - 1 \iff a = -1$ , donc finalement :

$$f(x) = e^x - x + 2e^{-x}$$

$$(E): \quad y' + y = 2e^x - x - 1$$

4. a.

$$g(x) = e^x - x + 2e^{-x}.$$

$g$  étant une somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , on a sur cet intervalle :

$g'(x) = e^x - 1 - 2e^{-x}$ , soit en remplaçant dans l'équation (E) :

$e^x - 1 - 2e^{-x} + e^x - x + 2e^{-x} = 2e^x - x - 1$  égalité vraie :  $g$  est donc une solution de l'équation différentielle (E).

- b.  $y' + y = 0 \iff y' = -y$  : on sait que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par :

$$x \mapsto f(x) = Ke^{-x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

- c. D'après les questions précédentes les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies que  $\mathbb{R}$  par :

$$x \mapsto e^x - x + 2e^{-x} + Ke^{-x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

**Partie B : Étude de la fonction  $g$  sur  $[1 ; +\infty[$** 

1. En posant  $X = e^x$ , on a  $X^2 - X - 2$  et ce trinôme a deux solutions évidentes 2 et  $-1$ .  
 $X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$ , donc en revenant à l'écriture initiale :  
 $e^{2x} - e^x - 2 = (e^x - 2)(e^x + 1)$  pour tout réel  $x$ .
2.  $g'(x) = e^x - 1 - 2e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - e^x - 2)$ , donc d'après la question précédente :  
 $g'(x) = e^{-x}(e^x - 2)(e^x + 1)$ .
3. Puisque  $e^x - 2 > 0$  (admis),  $e^x + 1 > 1 > 0$  et  $e^{-x} > 0$ , donc leur produit  $g'(x) > 0$ .  
Il en résulte que la fonction  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $[1 ; +\infty[$ .