∽ BACCALAURÉAT GÉNÉRAL ∾

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ – CORRIGÉ

Session 15 mars 2021 Sujet 1

Exercice 1 — Commun à tous les candidats — 5 points

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

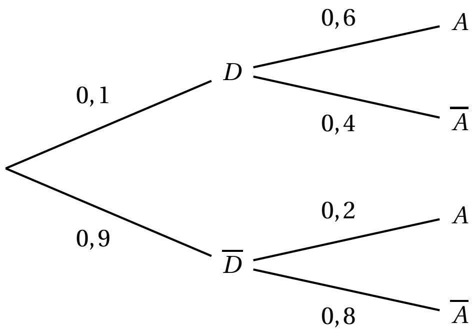
- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie I

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènement D et A respectivement.

1. On traduit la situation par un arbre pondéré :



2. La probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école est :
$P(D \cap A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$.
3. La probabilité de l'évènement A est $P(A)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(A) = P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A) = 0,06 + 0,9 \times 0,2 = 0,24$.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. La probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné est :
$P_A(\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,18}{0,24} = 0,75$.

Partie II

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24.
On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.
   a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   La probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $p = 0,24$, et on choisit un échantillon de 7 candidats donc $n = 7$.
   La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(7\,;0,24)$.
   b. La probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école est :
   $P(X=1) = \dbinom{7}{1} \times 0,24^1 \times (1-0,24)^{7-1} \approx 0,32$.

c. La probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école est : $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - 0,47 = 0,53$.

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.

On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

a. La variable aléatoire Y qui donne le nombre d'admis parmi les n candidats présentés suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,0,24)$.

La probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école est :

$P(Y=0) = \binom{n}{0} \times 0,24^0 \times 0,76^n = 0,76^n$.

b. On cherche à partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à $0,99$.

On veut donc que $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$ c'est-à-dire $1 - P(Y=0) \geqslant 0,99$ ou encore $P(Y=0) \leqslant 0,01$. On résout l'inéquation d'inconnue n : $0,76^n \leqslant 0,01$:

$0,76^n \leqslant 0,01 \iff \ln\left(0,76^n\right) \leqslant \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,76) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)}$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)} \approx 16,8$ donc c'est à partir de 17 élèves que la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à $0,99$.

Exercice 2 — Commun à tous les candidats — 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a. D'après le cours, la limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.

b. On cherche la limite de f en 0 :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$$

Donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times x - \mathrm{e}^x \times 1}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$.

3. Pour déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on cherche le signe de $f'(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^1}{1} = \mathrm{e}$

On établit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

4. Soit m un nombre réel. On cherche, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
Cela revient à chercher le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite horizontale d'équation $y = m$.
D'après le tableau de variations :
- si $m < \text{e}$, l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution ;
- si $m = \text{e}$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique $x = 1$;
- si $m > \text{e}$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

a. La tangente en a est parallèle à la droite Δ si et seulement si le coefficient directeur de la tangente est égal à -1, autrement dit quand $f'(a) = -1$.

$$f'(a) = -1 \iff \frac{\text{e}^{a}(a-1)}{a^2} = -1 \iff \text{e}^{a}(x-1) = -a^2 \iff \text{e}^{a}(x-1) + a^2 = 0$$

ce qui veut dire que le nombre a est solution de l'équation $\text{e}^{x}(x-1) + x^2 = 0$.

On note g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \text{e}^{x}(x-1) + x^2$.
On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

b. $g'(x) = \text{e}^{x} \times (x-1) + \text{e}^{x} \times 1 + 2x = x\text{e}^{x} + 2x$

Sur $\mathbb{R}$, $\text{e}^{x} > 0$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$, $x\text{e}^{x} + 2x \geqslant 0$ donc $g'(x) \geqslant 0$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$g(0) = \text{e}^{0}(0-1) + 0 = -1$

On dresse le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$:

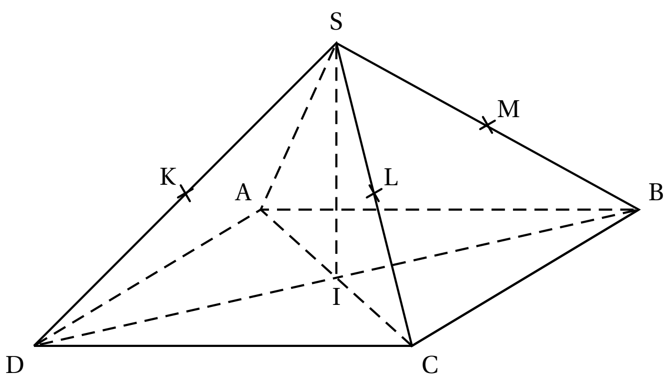
x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

c. On complète le tableau de variations de g :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après ce tableau, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique a sur $[0\,;\,+\infty[$, donc il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Exercice 3 — Commun à tous les candidats — 5 points



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point I est le centre du carré ABCD. On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) $\boxed{\textbf{c. } \text{(AC) et (SB)}}$ **d.** (LM) et (AD)

> On procède par élimination.
> - Les droites (DK) et (SD) sont sécantes en D donc coplanaires; on élimine **a.**
> - Les droites (AS) et (IC) sont sécantes en A donc coplanaires; on élimine **b.**
> - Les droites (LM) et (AD) sont toutes deux parallèles à (BC) donc parallèles entre elles; elles sont donc coplanaires; on élimine **d.**
>
> **Réponse c.**

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\text{I} ; \overrightarrow{\text{IC}}, \overrightarrow{\text{IB}}, \overrightarrow{\text{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\text{I}(0 ; 0 ; 0) ; \text{A}(-1 ; 0 ; 0) ; \text{B}(0 ; 1 ; 0) ; \text{C}(1 ; 0 ; 0); \text{D}(0 ; -1 ; 0) ; \text{S}(0 ; 0 ; 1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$ $\boxed{\textbf{b.} \left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)}$ **c.** $\left(-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$

> - Le milieu K de [SD] a pour coordonnées $\left(0 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.
> - Le milieu L de [SC] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{1}{2}\right)$.
> - Le milieu N de [KL] a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$.
>
> **Réponse b.**

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\boxed{\textbf{b.} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

> **Réponse b.**

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\left\{\begin{array}{l c r} x &=& -1-t\\ y &=& t\\ z &=& -t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{l c r} x &=& -1+2t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+2t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ $\boxed{\textbf{c.} \left\{\begin{array}{l c r} x &=& t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+t\end{array}\right. (t \in \mathbb{R})}$ **d.** $\left\{\begin{array}{l c r} x &=& -1-t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 1-t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

> La droite (AS) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{AS}}\,(1 ; 0 ; 1)$; la seule représentation qui convienne est la c.
>
> **Réponse c.**

5. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a. $y+z-1=0$ $\boxed{\textbf{b.}\ x+y+z-1=0}$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$

> On procède par élimination.
> - Le plan d'équation $y+z-1=0$ ne contient pas C (1 ; 0 ; 0) ; on élimine **a.**
> - Le plan d'équation $x-y+z=0$ ne contient pas S (0 ; 0 ; 1) ; on élimine **c.**
> - Le plan d'équation $x+z-1=0$ ne contient pas B (0 ; 1 ; 0) ; on élimine **d.**
>
> **Réponse b.**

Exercice au choix du candidat 5 points

Exercice A

Principaux domaines abordés : Suites numériques; raisonnement par récurrence; suites géométriques.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1$.

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{3}{4}u_0 + \dfrac{1}{4} \times 0 + 1 = \dfrac{3}{4} \times 1 + 1 = \dfrac{7}{4}$.

Pour $n = 1$, $u_1 = u_{1+1} = \dfrac{3}{4}u_1 + \dfrac{1}{4} \times 1 + 1 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{41}{16}$.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2. **a.** La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B est :
= 3/4 * B2 + 1/4 * A2 +1.

b. La suite (u_n) semble croissante.

3. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité**
  On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ (hypothèse de récurrence).

$$\begin{aligned} n \leqslant u_n \leqslant n+1 &\iff \frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) \\ &\iff \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n \\ &\iff n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant n + \frac{3}{4} \\ &\iff n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant n + \frac{3}{4} + 1 \iff n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

  donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.
  On a démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b. D'après la question précédente :

- Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ donc $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ d'où on tire $u_n \leqslant u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, $n \leqslant u_n$; or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c. Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$ c'est-à-dire : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Pour tout n, $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \dfrac{3}{4}(v_n + n) - \dfrac{3}{4}n = \dfrac{3}{4}v_n + \dfrac{3}{4}n - \dfrac{3}{4}n = \dfrac{3}{4}v_n$

$v_0 = u_0 - 0 = 1$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

b. On en déduit que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme ; convexité

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \dfrac{3}{x}$,
où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.

$f(x) = x\left(1 - 4\dfrac{\ln(x)}{x}\right) + 4 - \dfrac{3}{x}$

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - 4\frac{\ln(x)}{x}\right) + 4 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

$f'(x) = 1 + 0 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$

3. a. On cherche le signe de $f'(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$:

$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

x	0		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(1) = 1 + 4 - 4\ln(1) - \dfrac{3}{1} = 2$; $f(3) = 3 + 4 - 4\ln(3) - \dfrac{3}{3} = 6 - 4\ln(3) \approx 1,69$

On établit le tableau des variations de f en admettant que que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$:

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$6 - 4\ln(3) \approx 1,61$	$\nearrow$	$+\infty$

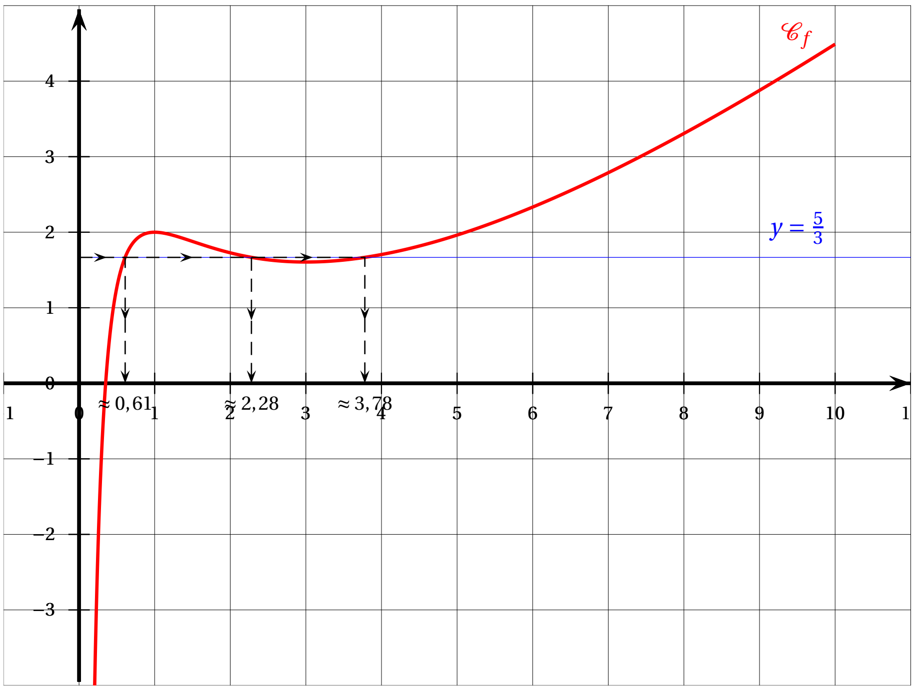
b. • $\dfrac{5}{3} \in]-\infty\ ;\ 2]$ donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

• $\dfrac{5}{3} \approx 1,67$ et $f(3) = 6 - 4\ln 3 \approx 1,61$ donc $\dfrac{5}{3} \in [6 - 4\ln 3\ ;\ 2]$, donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1\ ;\ 3[$.

• $\dfrac{5}{3} \in [6 - 4\ln 3\ ;\ +\infty[$, donc $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

Conclusion : l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet donc trois solutions dans $]0\ ;\ +\infty[$.

Voir cidessus les valeurs approchées des solutions.



4. Pour étudier la convexité de f, on détermine le signe de f'', la dérivée seconde de f.

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$ donc

$f''(x) = \dfrac{(2x-4) \times x^2 - (x^2 - 4x + 3) \times 2x}{x^4} = \dfrac{(2x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 6) \times x}{x^4} = \dfrac{4x - 6}{x^3}$

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x - 6$		$-$	0	$+$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
	‖	f concave		f convexe	

La dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x = \dfrac{3}{2}$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2} + 4 - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{3}{\frac{3}{2}} = \dfrac{11}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - 2 = \dfrac{7}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

La courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{7}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$.