Corrigé du baccalauréat Polynésie 14 mars 2023

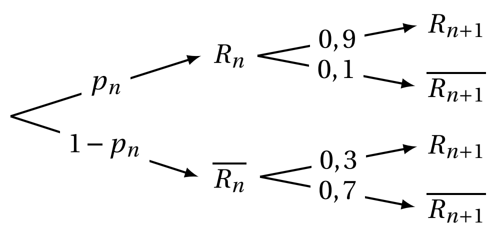
Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 5 points

Partie A

1.



2. Les évènements R_n et $\overline{R_n}$ partitionnent l'univers, la loi des probabilités totales donne :

$p_{n+1} = P(R_{n+1}) = P\left(R_n \cap R_{n+1}\right) + P\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) = p_n \times 0,9 + (1-p_n) \times 0,3 = 0,9p_n + 0,3 - 0,3p_n$

Donc on a bien $p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3$: on a donc bien établi la relation de récurrence annoncée.

3. a. Établissons la relation de récurrence de la suite (u_n). Soit n un entier naturel :

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75$ par définition de la suite (u_n)

$= (0,6p_n + 0,3) - 0,75$ par la relation de récurrence de la suite (p_n)

$= 0,6p_n - 0,45$

$= 0,6(u_n + 0,75) - 0,45$ par définition de la suite (u_n)

$= 0,6u_n + 0,45 - 0,45$

$= 0,6u_n$

La relation de récurrence de la suite (u_n) est donc bien celle d'une suite géométrique, de raison $q = 0,6$. Le premier terme de la suite est $u_0 = p_0 - 0,75 = 0,6 - 0,75 = -0,15$.

b. On peut donc donner la forme explicite du terme général de la suite géométrique :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n = -0,15 \times 0,6^n$.

On en déduit : $u_n = p_n - 0,75 \iff p_n = u_n + 0,75 = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$.

$$p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

c. La raison de la suite géométrique u est comprise entre -1 et 1, strictement, donc la suite u converge vers 0.

Par limite de la somme, on en déduit que la suite p converge vers $\ell = 0,75$.

d. En assimilant les probabilités à des proportions, au bout d'un certain temps, l'athlète franchira la barre dans 75 % des cas.

Partie B

1. Ici, nous avons :

- une expérience à deux issues dont le succès est « l'athlète franchit la haie » a une probabilité $p = 0,75$;

- cette expérience est répétée dix fois (la course comporte 10 haies) d'une façon assimilable à une répétition identique et indépendante , donc $n = 10$ répétitions;
- dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,75$, on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (le nombre de haies franchies pendant la course).

Avec ces éléments, on peut dire que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0,75)$.

2. La probabilité demandée est $P(X = 10)$. Par propriété, on a :

$P(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,75^{10} \times 0,25^{0} = 0,75^{10} \approx 0,056$.

La probabilité que l'athlète franchisse les dix haies est donc d'environ 0,056.

3. La probabilité demandée est $P(X \geqslant 9)$.

Selon le modèle de calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de ce résultat directement, ou alors on a recours à : $P(X \geqslant 9) = 1 - P(X < 9) = 1 - P(X \leqslant 8)$.

La calculatrice donne une valeur approchée au millième près qui est 0,244.

EXERCICE 2 5 points

1. Le plan $\mathscr{P}_1$ a pour équation $5x + 2y + 4z = 17$, un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ est donc $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

De même le plan $\mathscr{P}_2$ a pour équation $10x+14y+3z = 19$, un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$ est $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Il n'existe pas de réel λ tel que $\overrightarrow{n_2} = \lambda \overrightarrow{n_1}$ $\left(\dfrac{10}{5} \neq \dfrac{14}{2}\right)$ donc les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires, d'où les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.

2. Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles, ils sont donc sécants.

Vérifions que la droite $\mathscr{D}$ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

Soit t un réel quelconque et soit M_t le point de paramètre t de la droite $\mathscr{D}$.

$5x_{M_t} + 2y_{M_t} + 4z_{M_t} = 5(1+2t) + 2 \times (-t) + 4(3-2t) = 5 + 10t - 2t + 12 - 8t = 17$ donc M_t est aussi un point du plan $\mathscr{P}_1$.

$10x_{M_t} + 14y_{M_t} + 3z_{M_t} = 10(1+2t) + 14 \times (-t) + 3(3-2t) = 10 + 20t - 14t + 9 - 6t = 19$ donc M_t est aussi un point du plan $\mathscr{P}_2$.

M_t appartient donc l'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, la droite $\mathscr{D}$ est donc bien l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

3. **a.** $5x_A + 2y_A + 4z_A = 5 \times 1 + 2 \times (-1) + 4 \times (-1) = 5 - 2 - 4 = -1 \neq 17$ donc le points A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}_1$.

b. A appartient à la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x_A = 1 + 2t \\ y_A = -t \\ z_A = 3 - 2t \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 1 + 2t \\ -1 = -t \\ -1 = 3 - 2t \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 2t \\ 1 = t \\ 2t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution donc le point A n'appartient donc pas à la droite $\mathscr{D}$.

4. **a.** Soit t un réel :

$f(t) = \text{A}M^2 = (x_M - x_\text{A})^2 + (y_M - y_\text{A})^2 + (z_M - z_\text{A})^2 = (1+2t-1)^2 + (-t+1)^2 + (3-2t+1)^2$

$f(t) = (2t)^2 + (-t+1)^2 + (4-2t)^2 = 4t^2 + t^2 - 2t + 1 + 16 - 16t + 4t^2 = 9t^2 - 18t + 17$

b. La distance AM est minimale si et seulement si la distance AM^2 est minimale c'est à dire $f(t)$ est minimale.

f est un polynôme du second degré avec un coefficient dominant (9) positif. f admet donc un minimum pour $t = \dfrac{-(-18)}{2\times 9} = \dfrac{18}{18} = 1$.

Le point de $\mathscr{D}$ qui correspond au paramètre $t = 1$ est le point M de coordonnées $(1+2\times 1~;~-1~;~3-2\times 1)$ c'est à dire $M(3~;~-1~;~1)$, ce qui est ce qu'il fallait démontrer.

5. Un vecteur directeur de la droite (AH) est le vecteur $\overrightarrow{\text{AH}}\begin{pmatrix} x_\text{H} - x_\text{A}\\ y_\text{H} - y_\text{A}\\ z_\text{H} - z_\text{A}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1\\ -1+1\\ 1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$

D'après la représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$, un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ -2\end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer les produits scalaires à l'aide des coordonnées :

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\text{AH}} = 2\times 2 - 1\times 0 + 2\times(-2) = 4 + 0 - 4 = 0$: $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{AH}}$.

Les droites (AH) et $\mathscr{D}$ sont donc orthogonales.

De plus, d'après la question précédente, le point H appartient à la droite $\mathscr{D}$, il appartient aussi à la droite (AH), ces deux droites sont donc sécantes au point H, elles sont donc perpendiculaires.

EXERCICE 3 5 points

Partie A

1. La fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathscr{C}_2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, si c'était la dérivée d'une fonction, cette fonction serait strictement croissante or aucune des deux autres fonctions n'est strictement croissante. Cette fonction ne peut pas être la dérivée d'une des deux autres, c'est donc la fonction f.

f étant strictement croissante, sa dérivée est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est donc la fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathscr{C}_3$

Et par élimination, $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f'' (On vérifie que f' est croissante sur $]-\infty~;~4]$ et décroissante sur $[4~;~+\infty[$ ce qui coïncide avec le signe de $f''(x)$ qui est positive sur $]-\infty~;~4]$ et négative sur $[4~;~+\infty[$.

$\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f''.

$\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction f.

$\mathscr{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction f'.

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$, courbe représentative de la fonction f, au point d'abscisse 4 est égal à $f'(4)$ soit 3 par lecture graphique.

3. Les abscisses des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_1$ sont environ 3 , 4 et 5.

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} -kx = +\infty$ car $k > 0$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \text{e}^X = +\infty$, donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{e}^{-kx} = +\infty$

   d'où, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \text{e}^{-kx} = +\infty$

   et donc, par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{1+\text{e}^{-kx}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} -kx = -\infty$ car $k > 0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \text{e}^X = 0$, donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^{-kx} = 0$

   d'où, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \text{e}^{-kx} = 1$

   et donc, par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{1+\text{e}^{-kx}} = 4$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 4$

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur ce même intervalle.

   g est de la forme$4 \times \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 1 + \text{e}^{-kx}$. On a $u'(x) = -k\text{e}^{-kx}$.

   $g' = 4 \times \dfrac{-u'}{u^2}$ donc, pour tout réel x, $g'(x) = 4 \times \dfrac{k\text{e}^{-kx}}{\left(1+\text{e}^{-kx}\right)^2}$

   On a donc : $g'(0) = \dfrac{4k\text{e}^0}{\left(1+\text{e}^{-k0}\right)^2} = \dfrac{4k}{2^2} = k$

3. La courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse x si et seulement si g'' s'annule en changeant de signe en x. Il faut donc étudier le signe de $g''(x)$.

   Pour tout réel x, $g''(x) = -4\text{e}^{kx}\left(\text{e}^{kx} - 1\right)\dfrac{k^2}{\left(\text{e}^{kx}+1\right)^3}$.

   Une exponentielle est strictement positive et k est un réel strictement positif, donc, pour tout réel x, $4\text{e}^{kx}\dfrac{k^2}{\left(\text{e}^{kx}+1\right)^3} > 0$.

   Le signe de $g''(x)$ est donc le signe de $-\left(\text{e}^{kx} - 1\right) = 1 - \text{e}^{kx}$

   $1 - \text{e}^{kx} > 0 \iff 1 > \text{e}^{kx} \iff 0 > kx \iff 0 > x$ car $k > 0$.

   $g''(x)$ est donc strictement positive sur $]-\infty\ ;\ 0[$, s'annule en 0 et strictement négative sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   g admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

EXERCICE 4 5 points

1. Affirmation 1 : Vraie

   Pour tout entier naturel n : $n \geqslant 0 \Longrightarrow n+1 \geqslant 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$ et $-\dfrac{1}{n+1} \geqslant -1$.

   De plus, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

   D'où $\dfrac{-1}{n+1} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ car $n+1 > 0$

   finalement on a : $-1 \leqslant \dfrac{-1}{n+1} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$.

   La suite u est bornée par -1 et 1.

2. Affirmation 2 : Fausse

Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple :

Considérons la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$.

Cette suite est bornée par -1 et 1 mais elle n'est pas convergente.

3. Affirmation 3 : Fausse

Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple :

Considérons la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -\dfrac{1}{n}$.

Cette suite est croissante et converge vers 0.

4. Affirmation 4 : Fausse

Pour étudier la convexité d'une fonction, il faut déterminer le signe de sa dérivée seconde.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = x^2+2x+2$. On a $u'(x) = 2x+2$.

$f' = \dfrac{u'}{u}$ donc, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$.

f' est de la forme $\dfrac{v}{w}$ avec $v(x) = 2x+2$ et $w(x) = x^2+2x+2$.

On a $v'(x) = 2$ et $w'(x) = 2x+2$.

$f'' = \dfrac{v' \times w - w' \times v}{w^2}$ donc, pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{2\times(x^2+2x+2)-(2x+2)\times(2x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$

$f''(x) = \dfrac{2x^2+4x+4-4x^2-8x-4}{\left(x^2+2x+2\right)^2} = \dfrac{-2x^2-4x}{\left(x^2+2x+2\right)^2} = \dfrac{-2x(x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$.

Un carré est toujours strictement positif, $f''(x)$ est donc du signe de $-2x(x+2)$ qui est une fonction polynôme du second degré avec un coefficient dominant négatif (-2) et qui a pour racines 0 et -2.

On a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a déduit que f est concave sur $]-\infty\,;\,-2]$ et sur $[0\,;\,+\infty[$, et elle est convexe sur $[-2\,;\,0]$.

Elle n'est donc pas convexe sur $[-3\,;\,1]$.

5. Affirmation 5 : vraie

On initialise M avec le premier terme de la suite, puis l'algorithme va comparer chaque terme de la liste à M, si un terme est supérieur à M, il va remplacer M.

Cet algorithme donne donc la valeur maximale des termes de la suite, soit 7 dans notre cas.