

∞ Corrigé du baccalauréat Centres étrangers 10 juin 2021 ∞

Candidats libres Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Question 1 :

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2x - \frac{3}{x}$.

Si T est la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1, on sait que :

$$M(x; y) \in T \iff y - g(1) = g'(1)(x - 1).$$

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sur cet intervalle : $g'(x) = 2x + 2 + \frac{3}{x^2}$

$$\text{On a donc } g'(1) = 2 + 2 + \frac{3}{1} = 7;$$

$$\text{D'autre part } g(1) = 1^2 + 2 \times 1 - \frac{3}{1} = 0.$$

$$\text{On a donc : } M(x; y) \in T \iff y - 0 = 7(x - 1) \iff y = 7x - 7. \text{ Réponse a.}$$

Question 2 :

Pour n assez grand, on a $n \neq 0$, donc $v_n = \frac{3}{1 + \frac{2}{n}}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$. Réponse b.

Question 3 :

Si X est la variable aléatoire correspondant au nombre de boules noires tirées, l'expérience correspond à une loi de Bernoulli et X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,6$.

On sait que $p(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,6^4 \times (1 - 0,6)^6 \approx 0,11147 \approx 0,1115$ à 10^{-4} près. Réponse c.

Question 4 :

On a pour $x \neq 0$, $f(x) = x \left(3 \frac{e^x}{x} - 1 \right)$.

Or on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = +\infty$ et par produit de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ Réponse b.}$$

Question 5 :

Le nombre de codes différents est donc $36^8 = 2821\,109\,907\,456$.

Il faut donc $\frac{2821\,109\,907\,456}{10^8} \approx 28211$ (s) ou $\approx 478,2$ (min) ou $\approx 7,8$ (h). Réponse b.

EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

1. a. Retrancher 2 % c'est multiplier par $1 - \frac{2}{100} = 1 - 0,02 = 0,98$.

D'une année sur l'autre on multiplie le nombre de panneaux par 0,98 puis on augmente de nombre de panneaux de 250.

- b.** Avec la calculatrice il suffit de taper 10 560 Entrée puis $\times 0,98 + 50$.
Entrée donne $u_1 \approx 10599$, les appuis successifs de Entrée donnent u_2, u_3 , etc.
On obtient $u_{68} \approx 12009$.
le nombre de panneaux dépassera 12 000 au bout de 68 ans soit en 2088.
- c.** Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```

u = 10560
n = 0
while u <= 12000 :
    u = 0,98 * u + 250
    n = n + 1

```

- 2.** *Initialisation* : $u_0 = 10560 \leq 12500$: la proposition est vraie au rang 0.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq 12500$ soit en multipliant par 0,98 :
 $0,98u_n \leq 0,98 \times 12500$ et en ajoutant 250 à chaque membre :
 $0,98u_n + 250 \leq 0,98 \times 12500 + 250$ ou $u_{n+1} \leq 12250 + 250$ et finalement $u_{n+1} \leq 12500$: la proposition est vraie au rang $n + 1$.
La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle est vraie au rang $n + 1$: d'après le principe de la récurrence la proposition $u_n \leq 12500$ est vraie pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$.
- 3.** On a pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,98u_n + 250 - u_n = 250 - 0,02u_n$.
Or d'après le résultat précédent :
 $u_n \leq 12500 \Rightarrow 0,02u_n \leq 0,02 \times 12500$ ou encore $0,02u_n \leq 250$ ou en ajoutant à chaque membre $-0,02u_n$:
 $0 \leq 250 - 0,02u_n$; on a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.
- 4.** La suite (u_n) est croissante et majorée par 12 500 : elle est donc convergente vers une limite ℓ , telle que $\ell \leq 2500$.
- 5.**
- a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 12500 = 0,98u_n + 250 - 12500$, soit
 $v_{n+1} = 0,98u_n - 12250 = 0,98u_n - 12250 \times \frac{0,98}{0,98} = 0,98u_n - 12500 \times 0,98 = 0,98(u_n - 12500)$ soit enfin $v_{n+1} = 0,98v_n$: cette relation vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 de premier terme $v_0 = u_0 - 12500 = 10560 - 12500 = -1940$.
- b.** On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,98^n$, soit $v_n = -1940 \times 0,98^n$.
- c.** Pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 12500 \iff u_n = v_n + 12500 = 12500 - 1940 \times 0,98^n$.
- d.** Comme $0 < 0,98 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,98^n = 0$, donc
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12500$
Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

1. La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = -0,02 \times (-500)e^{-0,02x+1,4} = 10e^{-0,02x+1,4}.$$

Comme la fonction exponentielle est strictement positive, on en déduit que $f'(x) > 0$: la fonction est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

2. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-0,02x+1,4} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 500e^{-0,02x+1,4} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 12500$.

3. Il faut résoudre l'inéquation :

$$12500 - 500e^{-0,02x+1,4} > 12000 \iff 500 > 500e^{-0,02x+1,4} \iff 1 > e^{-0,02x+1,4} \iff e^0 \geq e^{-0,02x+1,4}, \text{ soit par croissance de la fonction exponentielle :}$$

$$0 > -0,02x + 1,4 \iff 0,02x > 1,4 \text{ et en multipliant chaque membre par } 50 :$$

$x > 70$: il faut donc attendre 71 ans pour que le nombre de panneaux dépasse 12 000, soit en 2091.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE et J est un point du segment [CG].

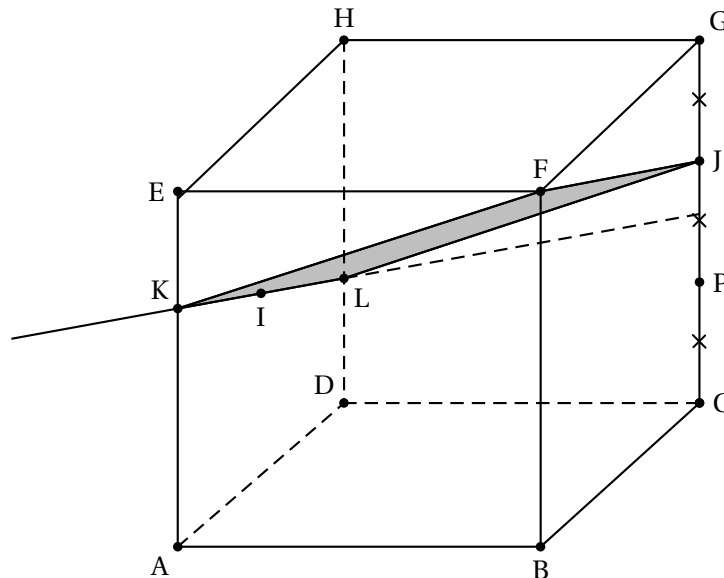
Il existe donc $a \in [0 ; 1]$ tel que $\vec{CJ} = a\vec{CG}$.

On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).

On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).

On se place dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

Partie A : Dans cette partie $a = \frac{2}{3}$



1. Dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, $F(1; 0; 1)$, I milieu de [AH] et de [DE], donc $I(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ et $J(1; 1; \frac{2}{3})$

2. On a $M(x; y; z) \in (d) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{FJ}$.

Avec $\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-\frac{1}{2} \\ z-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, on a donc

$$M(x; y; z) \in (d) \iff \begin{cases} x &= t \times 0 \\ y-\frac{1}{2} &= t \times 1 \\ z-\frac{1}{2} &= t \times (-\frac{1}{3}) \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= \frac{1}{2} + t \\ z &= \frac{1}{2} - \frac{t}{3} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. a. Le point K est le point de (d) d'ordonnée nulle, soit $t + \frac{1}{2} = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$. Sa cote est donc $z = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Donc $K(0; 0; \frac{2}{3})$.

b. Tous les points de (d) ont une ordonnée égale à 1.

Or un point de (d) a une ordonnée égale à $\frac{1}{2} + t = 1 \iff t = \frac{1}{2}$.

Enfin L a une cote égale à $z = \frac{1}{2} - \frac{t}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$L(0; 1; \frac{1}{3})$.

4. a. Le milieu de $[FL]$ a pour coordonnées $(\frac{1+0}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{1+\frac{1}{3}}{2})$, soit $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3})$.

Le milieu de $[JK]$ a pour coordonnées $(\frac{0+1}{2}; \frac{1+0}{2}; \frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{2})$, soit $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3})$.

Conclusion : les diagonales de $FJLK$ ont le même milieu : $FJLK$ est un parallélogramme.

b. On a $\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = 1 - 1 + 0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, les diagonales du parallélogramme sont perpendiculaires, donc $FJLK$ est un losange.

c. On a $\overrightarrow{KF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{KF} \cdot \overrightarrow{FJ} = 0 + 0 - \frac{1}{9} \neq 0$: les vecteurs ne sont pas

orthogonaux, donc les côtés consécutifs $[KF]$ et $[FJ]$ ne sont pas perpendiculaires, donc $FJLK$ n'est pas un rectangle, donc pas un carré.

Partie B : Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont : $K(0; 0; 1 - \frac{a}{2})$ et $L(0; 1; \frac{a}{2})$.

On rappelle que $a \in [0; 1]$.

1. On sait que J est défini par $\overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG}$.

On a avec $G(1; 1; 1)$, $\overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc $a\overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{CJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ et comme C a pour coordonnées $(1; 1; 0)$, on en déduit que J a pour coordonnées $(1; 1; a)$.

$$2. \text{ On a } \overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{KL} \iff$ FJLK est un parallélogramme.

$$3. \text{ On a } \overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{a}{2}-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1-\frac{3a}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = 1 - 1 + \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right).$$

$$\text{On a } \overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = 0 \iff \begin{cases} \frac{a}{2} - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ 1 - \frac{3a}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a}{2} = 1 \\ \text{ou} \\ 1 = \frac{3a}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ \text{ou} \\ \frac{2}{3} = a \end{cases}$$

La seule solution de l'intervalle $[0; 1]$ est $\frac{2}{3}$, la valeur particulière de la partie A.

Dans ce cas le produit scalaires étant nul, les vecteurs sont orthogonaux, donc les droites sont particulières : les diagonales du parallélogramme étant perpendiculaires, le quadrilatère FJLK est un losange.

4. On a vu dans la question précédente que seule la valeur $\frac{2}{3}$ de a donnait un losange FJLK et dans la question 4. c. on a vu qu'alors le losange n'était pas un carré.

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT

5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE A - Fonction ln

Partie A :

1. + Si le test est négatif on aura fait un test : $X_n = 1$;
 + Si le test est positif il faudra faire le test des n personnes plus le test global : $X_n = 1 + n$.
2. $P(X_n = 1)$ est la probabilité que l'on ne fasse qu'un test : le test des n personnes et que celui-ci soit négatif donc que les n personnes ne soient pas malades.
 La probabilité qu'une personne soit malade est égale à 0,05, donc qu'une personne soit saine $1 - 0,05 = 0,95$ et donc que n personnes soient saines est égale à $0,95^n$.
 Donc $P(X_n = 1) = 0,95^n$.

On a donc $P(X_n = n + 1) = 1 - 0,95^n$

x_i	1	$n + 1$
$P(X_n = x_i)$	$0,95^n$	$1 - 0,95^n$

3. On a $E(X_n) = 1 \times 0,95^n + (n + 1) \times (1 - 0,95^n) = 0,95^n + (n + 1) - 0,95^n(n + 1) = 0,95^n + n + 1 - n \times 0,95^n - 0,95^n = n + 1 - n \times 0,95^n$.

Cette espérance représente le nombre moyen d'analyses à effectuer pour un échantillon n personnes : cette espérance est voisine de n .

Partie B :

1. $f(x) = \ln(x) + x \ln(0,95)$.

f est une somme de fonctions dérivables sur $]20; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \ln(0,95).$$

$$\text{Or } 20 \leq x \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{x} + \ln 0,95 \leq \frac{1}{20} + \ln 0,95.$$

Or $\frac{1}{20} + \ln 0,95 \approx -0,001$; il en résulte que $f'(x) \leq 0$: la fonction f est décroissante sur $]20; +\infty[$.

2. On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

$$\text{On a puisque } x \neq 0, \quad f(x) = x \left(\frac{\ln x}{x} + \ln 0,95 \right).$$

$$\text{Puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \ln 0,95 = \ln 0,95 < 0.$$

Finalement par produit de limites puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \ln 0,95 = 0,95 < 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

3. La question précédente montre que f est décroissante de $f(20) = \ln 20 + 20 \ln 0,95 \approx 1,97$ à moins l'infini.

f est continue car dérivable sur $]20; +\infty[$ et prend ses valeurs dans les l'intervalle $] -\infty; f(20)]$ avec $f(20) \approx 1,97$.

Comme $0 \in] -\infty; f(20)]$, et que f est décroissante sur cet intervalle il existe donc un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne $f(87,0) \approx 0,003$ et $f(87,1) \approx -0,0005$, donc $87,0 < \alpha < 87,1$.

4. D'après la question précédente :

$$f(x) > 0 \text{ sur }]20; \alpha[\text{ et } f(x) < 0 \text{ sur }]\alpha; +\infty[.$$

Partie C :

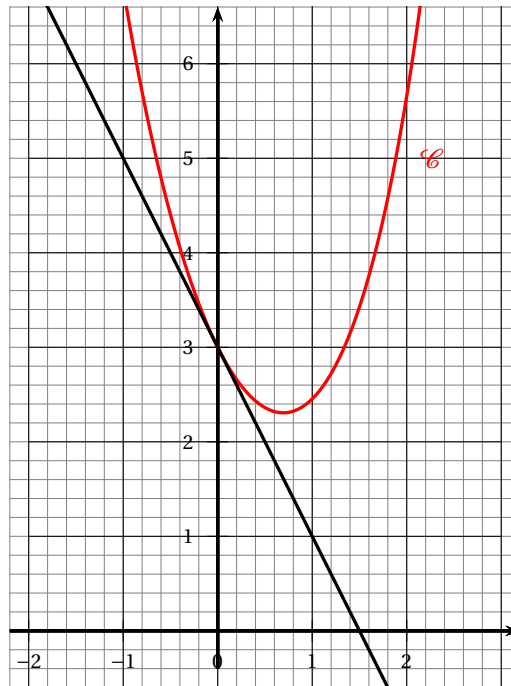
On a $E(X_n) < n \iff n+1 - n \times 0,95^n < n \iff 1 < n \times 0,95^n$ ou en prenant le logarithme népérien $0 < \ln n + \ln(0,95^n) \iff 0 < \ln n + n \ln 0,95 \iff 0 < f(n) \iff f(n) > 0$.

Or on a vu à la fin de la partie B que la fonction f est positive sur l'intervalle $]20; 87]$.

Conclusion : tester toutes les personnes conduira à moins d'analyses qu'avec la méthode 1 avec des échantillons de 20 à 87 personnes au maximum. Au delà il vaut mieux utiliser la première méthode.

EXERCICE B - Équation différentielle**Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle**

$$f(x) = e^x + ax + be^{-x}$$



1. + $f(0) \approx 3$;
+ $f'(0) \approx -2$ (coefficient directeur de la tangente)
2. On a $f(0) = 1 + b$. Or $1 + b = 3 \iff b = 2$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Sur \mathbb{R} , $f'(x) = e^x + a - be^{-x} = e^x + a - 2e^{-x}$.
 - b. Donc $f'(0) = 1 + a - 2 = a - 1$.
 - c. On a vu que $f'(0) = -2 = a - 1 \iff a = -1$, donc finalement :

$$f(x) = e^x - x + 2e^{-x}$$

$$(E): \quad y' + y = 2e^x - x - 1$$

4. a.

$$g(x) = e^x - x + 2e^{-x}.$$

g étant une somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , on a sur cet intervalle :

$g'(x) = e^x - 1 - 2e^{-x}$, soit en remplaçant dans l'équation (E) :

$e^x - 1 - 2e^{-x} + e^x - x + 2e^{-x} = 2e^x - x - 1$ égalité vraie : g est donc une solution de l'équation différentielle (E).

- b. $y' + y = 0 \iff y' = -y$: on sait que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par :

$$x \mapsto f(x) = Ke^{-x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

- c. D'après les questions précédentes les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies que \mathbb{R} par :

$$x \mapsto e^x - x + 2e^{-x} + Ke^{-x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

Partie B : Étude de la fonction g sur $[1 ; +\infty[$

1. En posant $X = e^x$, on a $X^2 - X - 2$ et ce trinôme a deux solutions évidentes 2 et -1 .
 $X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$, donc en revenant à l'écriture initiale :
 $e^{2x} - e^x - 2 = (e^x - 2)(e^x + 1)$ pour tout réel x .
2. $g'(x) = e^x - 1 - 2e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - e^x - 2)$, donc d'après la question précédente :
 $g'(x) = e^{-x}(e^x - 2)(e^x + 1)$.
3. Puisque $e^x - 2 > 0$ (admis), $e^x + 1 > 1 > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc leur produit $g'(x) > 0$.
Il en résulte que la fonction g est croissante sur \mathbb{R} , donc sur $[1 ; +\infty[$.