Corrigé du bac de maths 2024 en Amérique du Nord - sujet 2.

Mathovore.fr

Exercice 1. Probabilités — 5 points

Les données publiées le 1er mars 2023 par le ministère de la transition écologique sur les immatriculations de véhicules particuliers en France en 2022 contiennent les informations suivantes :

- $22,86\%$ des véhicules étaient des véhicules neufs ;
- $8,08\%$ des véhicules neufs étaient des hybrides rechargeables ;
- $1,27\%$ des véhicules d'occasion (c'est-à-dire qui ne sont pas neufs) étaient des hybrides rechargeables.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au dix-millième.

Partie A

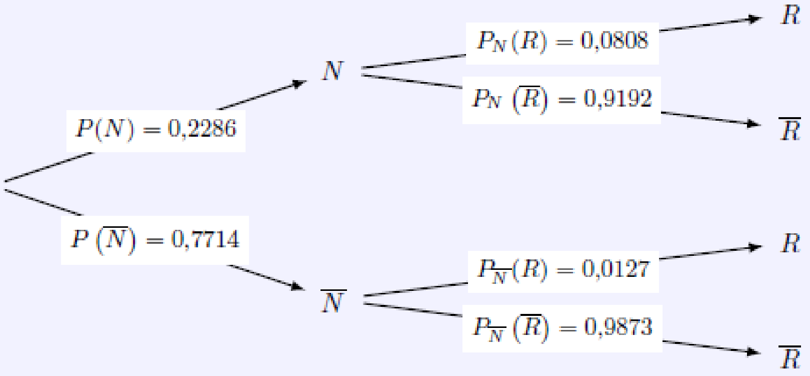
Dans cette partie, on considère un véhicule particulier immatriculé en France en 2022.
On note :

- N l'événement « le véhicule est neuf » ;
- R l'événement «le véhicule est hybride rechargeable » ;
- $\bar{N}$ et $\bar{R}$ les événements contraires des événements contraires de N et R.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

Corrigé



2. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable.

Corrigé

$$P(N \cap R) = P(N) \times P_N(R) = 0,2286 \times 0,0808 \approx 0,01847088$$

Soit arrondi au dix-millième :

$$\boxed{P(N \cap R) \approx 0,0185}$$

3. Démontrer que la valeur arrondie au dix-millième de la probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est 0,0283 .

Corrigé

On cherche $P(R)$.

Les évènements N et N formant une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(R) &= P(R \cap N) + P\left(R \cap \overline{N}\right) \\
P(R) &= P(N) \times P_N(R) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(R) \\
P(R) &= 0{,}2286 \times 0{,}0808 + 0{,}7714 \times 0{,}0127 \\
P(R) &= 0{,}01847088 + 0{,}00979678 \\
P(R) &= \underline{0{,}02826766}
\end{aligned}$$

Soit arrondi au dix-millième :

$$\boxed{P(R) \approx 0,0283}$$

4. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride .

Corrigé

La probabilité que le véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable est donnée par :

$$\begin{aligned}
P_R(N) &= \frac{P(N \cap R)}{P(R)} \\
&\approx \frac{0,0184}{0,0282}
\end{aligned}$$

Soit arrondi au dix-millième :

$$\boxed{P_R(N) \approx 0,6525}$$

Partie B

Dans cette partie, on choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022. Dans la suite, on admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65 .
On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.
On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.

Corrigé

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,65$.

2. Déterminer la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs.

Corrigé

La probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs est donnée par :

$$P(X = 325) = \binom{500}{325} \times 0,65^{325} \times (1 - 0,65)^{175}$$

La calculatrice donne :

$$\boxed{P(X = 325) \approx 0,0192}$$

3. Déterminer la probabilité $p(X \geqslant 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

La calculatrice donne directement :

$$P(X \geqslant 325) \approx 0,5$$

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'il y a une probabilité de 50 % qu'au moins 325 des 500 véhicules soient neufs.

Partie C

On choisit désormais n véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022, où n désigne un entier naturel strictement positif.

On rappelle que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65 .

On assimile le choix de ces n véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

1. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n que tous ces véhicules soient d'occasion.

Corrigé

La probabilité que tous les véhicules soient d'occasion est :

$$p_n = (1 - 0,65)^n = 0,35^n$$

2. On note q_n la probabilité qu'au moins un de ces véhicules soit neuf. En résolvant une inéquation, déterminer la plus petite valeur de n telle que $q_n \geqslant 0,9999$.

Corrigé

La probabilité que tous les n véhicules soient d'occasion est $(0{,}35)^n$. La probabilité complémentaire, c'est-à-dire qu'au moins un des n véhicules soit neuf, est alors :

$$q_n = 1 - p_n = 1 - (0{,}35)^n$$

Nous cherchons la plus petite valeur de n telle que $q_n \geqslant 0{,}9999$. Cela se traduit par l'inéquation suivante :

$$1 - (0{,}35)^n \geqslant 0{,}9999 \iff (0{,}35)^n \leqslant 0{,}0001$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$\begin{aligned}
&\iff \ln((0{,}35)^n) \leqslant \ln(0{,}0001)\\
&\iff n\ln(0{,}35) \leqslant \ln(0{,}0001) \quad \text{or } \ln(0{,}35) < 0\\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}35)} \approx 8{,}77
\end{aligned}$$

Comme n doit être un nombre entier, nous arrondissons au nombre entier supérieur le plus proche. Donc, la plus petite valeur de n telle que $q_n \geqslant 0{,}9999$ est $n = 9$.

Ainsi, la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité qu'au moins un des véhicules soit neuf est d'au moins 0,9999 est $n = 9$.

Exercice 2

1. On a $F(3;0;1)$, $H(0;1;1)$ et $M(1,5;1;0)$

2. **a.** On a $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}-1,5\\1\\-1\end{pmatrix}$.

   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires puisqu'ils n'ont pas la même composante nulle.
   Par conséquent :
   $\vec{n}.\overrightarrow{FH} = -6+6+0=0$
   $\vec{n}.\overrightarrow{FM} = -3+6-3=0$
   $\vec{n}$ est donc orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (HMF).
   $\vec{n}$ est ainsi un vecteur normal au plan (HMF).

   b. Une équation cartésienne du plan (HMF) est donc de la forme $2x+6y+3z+d=0$.
   $F(3;0;1)$ appartient à ce plan.
   Donc $6+0+3+d=0 \Leftrightarrow d=-9$.
   Une équation cartésienne du plan (HMF) est donc $2x+6y+3z-9=0$.

   c. Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\15\\-3\end{pmatrix}$

   Or $\dfrac{5}{2} \neq \dfrac{-3}{3}$.
   Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont donc pas colinéaires et les plans $\mathcal{P}$ et (HMF) ne sont pas parallèles.

3. On a $D(0;1;0)$ et $G(3;1;1)$ donc $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

   Une représentation paramétrique de la droite (DG) est donc $\begin{cases}x=3t\\y=1\\z=t\end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$.

4. On recherche l'ensemble solution du système :

$$\begin{cases}x=3t\\y=1\\z=t\\2x+6y+3z-9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3t\\y=1\\z=t\\6t+6+3t-9=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=3t\\y=1\\z=t\\9t=3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=3t\\y=1\\z=t\\t=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\\z=\dfrac{1}{3}\\t=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

   Par conséquent N a pour coordonnées $\left(1;1;\dfrac{1}{3}\right)$.

5. On a :

$$\begin{aligned} 2\times 3+6\times \frac{1}{4}+3\times \frac{1}{2}-9 &= -3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2} \\ &= -3 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Le point R n'appartient pas (HMF). Il ne peut donc pas être le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF).

Exercice 3

1. La fonction g est dérivable sur $[0;1]$ en tant que fonction polynôme.
   Pour tout réel $x \in [0;1]$ on a $g'(x) = 2-2x$.
   Or $2-2x=0 \Leftrightarrow x=1$ et $2-2x>0 \Leftrightarrow 2>2x \Leftrightarrow 1>x$.
   g est strictement croissante sur $[0;1]$.
   $g(0)=0$ et $g(1)=1$.

2. On a :
   $$\begin{aligned} u_1 &= g\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4} \\ u_2 &= g\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

3. Pour tout entier naturel n on pose $P(n):\ 0<u_n<u_{n+1}<1$.
   Initialisation : $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_1=\dfrac{3}{4}$.
   Or $0<\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{4}<1$. $P(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose $P(n)$ vraie.
   Ainsi $0<u_n<u_{n+1}<1$.
   La fonction g est strictement croissante sur $[0;1]$ donc $g(0)<g(u_n)<g(u_{n+1})<g(1)$.
   Ainsi $0<u_{n+1}<u_{n+2}<1$.
   $P(n+1)$ est vraie.

   D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n on a $0<u_n<u_{n+1}<1$.

4. La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone elle converge.

5. La fonction g est continue sur $[0;1]$ et pour tout entier naturel n on a $u_{n+1}=g(u_n)$.
   Par conséquent ℓ est solution de l'équation :
   $$\begin{aligned} x=g(x) &\Leftrightarrow x=2x-x^2 \\ &\Leftrightarrow x-x^2=0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1)=0 \end{aligned}$$
   Cette équation possède exactement deux solutions 0 et 1.
   La suite (u_n) est croissante et $u_0>0$. Par conséquent $\ell=1$.

6. Pour tout entier naturel n on a :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln\left(1-u_{n+1}\right) \\ &= \ln\left(1-2u_n+u_n^2\right) \\ &= \ln\left(\left(1-u_n\right)^2\right) \\ &= 2\ln\left(1-u_n\right) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$
La suite (v_n) est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.

7. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n = -\ln(2) \times 2^n$.

8. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\begin{aligned} -\ln(2)\times 2^n = \ln\left(1-u_n\right) &\Leftrightarrow 1-u_n = \exp\left(-\ln(2)\times 2^n\right) \\ &\Leftrightarrow u_n = 1-\exp\left(-\ln(2)\times 2^n\right) \end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ car $2>1$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(2)\times 2^n = -\infty$.
Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

9. On peut écrire :

```
def seuil():
    n = 0
    u = 0.5
    while u < 0.95 :
        n = n + 1
        u = 2 * u - u**2
    return n
```

Exercice 4

1. On veut résoudre l'équation :
$$\begin{aligned} f(x)=0 &\Leftrightarrow a\ln(x)=0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x)=0 \qquad \text{car } a>0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$
Le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses a donc pour coordonnées $(1;0)$.

2. La fonction F est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur cet intevalle.
Pour tout réel $x>0$ on a :
$$\begin{aligned} F'(x) &= a\left(\ln(x)+x\times\frac{1}{x}-1\right) \\ &= a\left(\ln(x)+1-1\right) \\ &= a\ln(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$
F est bien une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

3. L'aire du domaine grisé est :
$$\begin{aligned} \int_a^{x_0} f(x)\mathrm{d}x &= \Big[F(x)\Big]_a^{x_0} \\ &= F\left(x_0\right)-F(a) \\ &= a\left(x_0\ln\left(x_0\right)-x_0\right)-a\left(a\ln(a)-a\right) \end{aligned}$$

4. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit d'une fonction dérivable sur cet intervalle par une constante.
Pour tout réel $x > 0$ on a $f'(x) = \dfrac{a}{x}$
Une équation de T est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
$f'(x_0) = \dfrac{a}{x_0}$.
Une équation de T est donc $y = \dfrac{a}{x_0}(x - x_0) + a\ln(x_0)$.
Son ordonnée à l'origine est donc $\dfrac{a}{x_0} \times (-x_0) + a\ln(x_0) = -a + a\ln(x_0)$.
Ainsi A a pour coordonnées $(0; -a + a\ln(x_0))$.
B a pour coordonnées $(0; f(x_0))$ soit $(0; a\ln(x_0))$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned} AB &= a\ln(x_0) - (-a + a\ln(x_0)) \\ &= a \end{aligned}$$

AB est donc constante et vaut a.