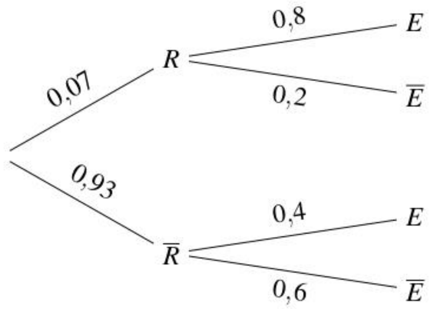
Corrigé du bac de maths 2024 en Amérique du Nord - sujet 1.

Mathovore.fr

Partie A

▶ **Exercice 1** 1. À l'aide des données de l'énoncé, on peut construire l'arbre pondéré suivant :



On a par ailleurs $P(R\cap E) = P(R) \times P_R(E) = 0{,}07 \times 0{,}8 = 0{,}056$

2. $(R, \overline{R})$ forme un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales, $P(E) = P(E\cap R) + P(E\cap \overline{R})$.
Ainsi, $P(E) = 0{,}056 + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(E) = 0{,}056 + 0{,}93 \times 0{,}4 = 0{,}428$.

3. On cherche $P_E(R)$. On a $P_E(R) = \dfrac{P(R\cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}056}{0{,}428} \simeq 0{,}131$ à 10^{-3} près.

Partie B

1. X compte le nombre de succès (l'objet est rare) d'un schéma de Bernoulli à 30 épreuves, chacune ayant une probabilité de succès de 0,07. X suit donc une loi binomiale de paramètres 30 et 0,07. Ainsi, $E(X) = 30 \times 0{,}07 = 2{,}1$.

2. Puisque X est à valeurs entières, $P(X < 6) = P(X \leqslant 5)$. D'après la calculatrice, on a $P(X < 6) \simeq 0{,}984$, arrondi au millième.

3. On a $P(X \geqslant 2) \simeq 0{,}631$ et $P(X \geqslant 3) \simeq 0{,}351$. L'entier recherché est donc 2. Cela signifie que le joueur à moins de 50% de chances de remporter 3 objets rares ou plus.

4. Notons Y la variable aléatoire qui compte le nombre d'objets rares en N tentatives. Y suit une loi binomiale de paramètres N et 0,07.

   On souhaite déterminer N tel que $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}95$. Or, $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0)$ car Y est à valeurs entières et positives.

   Or, $P(Y = 0) = 0{,}93^N$. On cherche donc N tel que $1 - 0{,}93^N \geqslant 0{,}95$.

   Or, $1 - 0{,}93^N \geqslant 0{,}95$ si et seulement si $-0{,}93^N \geqslant -0{,}05$ soit $0{,}93^N \leqslant 0{,}05$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, ceci équivaut à $\ln(0{,}93^N) \leqslant \ln(0{,}05)$ soit $N\ln(0{,}93) \leqslant \ln(0{,}05)$.

   Puisque $0 < 0{,}93 < 1$, il en vient que $\ln(0{,}93) < 0$.

   Ainsi, $1 - 0{,}93^N \geqslant 0{,}95$ si et seulement si $N \geqslant \dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}93)}$. Or, $\dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}93)} \simeq 41{,}3$. Ainsi, à partir de 42 tirages, la probabilité d'obtenir au moins un objet rare est supérieure ou égale à 0,95.

► **Exercice 2** 1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}4-1\\1-0\\0-3\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc $\left\{\begin{array}{l}x=1+3t\\y=0+t\\z=3-3t\end{array}\right.$ avec $t\in\mathbb{R}$.

On peut également remarquer qu'en prenant $t=0$ pour paramètre dans cette droite, on obtient le point A. Si par ailleurs, on prend $t=1$, on obtient le point B.

Il est également possible de procéder par élimination. Les droites **a.**, b. et **d.** admettant respectivement pour vecteurs directeurs les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$, tous trois non colinéaires au vecteur $\overrightarrow{AB}$, il ne peut s'agir des représentations paramétriques de la droite (AB). Par élimination, la réponse exacte est la réponse **c.**.

2. On remarque que M, N et P ont tous les trois 6 comme deuxième coordonnées. Puisque dans la représentation paramétrique de la droite (d), on a $y=6t$, cela signifie que le paramètre t vaudrait 1. Or, pour $t=1$, on trouve $x=3+4=7$ et $z=4-2=2$, ce qui ne correspond à aucun de ces quatre points. Par élimination, la réponse correcte est la réponse **d.**

   Vérifions tout de même. On cherche t tel que $3+4t=-3$, $6t=-9$ et $4-2t=7$: la résolution de ces équations nous donnant trois fois la même solution, $t=-\dfrac{3}{2}$, le point R appartient bien à la droite (d).

3. La droite (d) admet pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$. La droite (d') admet pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, les droites (d) et (d') ne peuvent être ni parallèles, ni confondues.

   Cherchons alors s'il existe des réels t et k tels que $\left\{\begin{array}{l}3+4t=-2+3k\\6t=-1-2k\\4-2t=1+k\end{array}\right.$. On a

$$\left\{\begin{array}{l}3+4t=-2+3k\\6t=-1-2k\\4-2t=1+k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3+4t=-2+3k\\6t=-1-2k\\k=3-2t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3+4t=-2+3(3-2t)\\6t=-1-2(3-2t)\\k=3-2t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}t=\frac{2}{5}\\t=-\frac{7}{2}\\k=3-2t\end{array}\right.$$

   C'est impossible, de tels réels t et k n'existent pas. Les droites (d) et (d') ne sont donc pas sécantes. Elles sont donc non coplanaires. Réponse **b.**

4. On peut d'emblée vérifier, en remplacer x, y et z par les coordonnées de I que le point I n'appartient pas aux plans **c.** et **d.**. En revanche, ce point appartient aux plans **a.** et **c.**
   Le plan (P) admet pour vecteur normal un vecteur directeur de la droite (d), en l'occurrence, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$. Le plan **a.** admet pour vecteur normal le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ qui est bien colinéaire à $\vec{u}$. En revanche, le plan **a.** admet pour vecteur normal le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix}$ qui n'est pas colinéaire à $\vec{u}$. Par élimination, la bonne réponse est la réponse **a.**.

▶ Exercice 3

Partie A

1. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1. Cette tangente n'est autre que la droite (AB), dont le coefficient directeur vaut $\dfrac{-1-(-4)}{1-0} = 3$. Ainsi, $f'(1) = 3$.
   Par ailleurs, le point B fournit directement l'ordonnée à l'origine de cette tangente.
   L'équation réduite de (T) est donc $y = 3x - 4$.
2. f semble concave sur $]0;1]$ et convexe sur $[1;+\infty[$.
   Le point A semble être le point d'inflexion de la courbe C_f.

Partie B

Remarque : Pour cet exercice, il est possible d'utiliser que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = 2x\ln(x) - \dfrac{1}{x}$.

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$.
   Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2) = +\infty$. Enfin, par produit et somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   Par ailleurs, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x^2) = 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.
   Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} = -\infty$.
2. (a) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 \times \ln(x^2) + x \times \dfrac{2x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} = \ln(x^2) + 2 + \dfrac{1}{x^2}$

   (b) Pour tout $x > 0$, $f''(x) = \dfrac{2x}{x^2} - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2x^2-2}{x^3} = \dfrac{2(x^2-1)}{x^3} = \dfrac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.
3. (a) Pour tout $x > 0$, on a $x + 1 > 0$ et $x^3 > 0$. $f''(x)$ est donc du signe de $x - 1$, qui est négatif sur $]0;1]$ et positif sur $[1;+\infty[$. f est donc concave sur $]0;1]$ et convexe sur $[1;+\infty[$.

   (b) On peut déterminer les variations de f' à l'aide du signe de f''

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	3	$\nearrow$	

   Ainsi, f admet 3 pour minimum : pour tout $x > 0$, $f'(x) \geqslant 3 > 0$.
   f est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
4. (a) La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0^+} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   Puisque $0 \in]-\infty;+\infty[$, d'après le théorème des intermédiaires, il existe un réel $x \in]0;+\infty[$ tel que $f(x) = 0$.
   Par ailleurs, la fonction f étant strictement croissante sur cet intervalle, cette solution est unique.

   (b) On trouve $\alpha \simeq 1{,}33$ à 10^{-2} près. Par ailleurs, $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\alpha\ln(\alpha^2) - \dfrac{1}{\alpha} = 0$.
   Ainsi, $\alpha\ln(\alpha^2) = \dfrac{1}{\alpha}$ et donc $\ln(\alpha^2) = \dfrac{1}{\alpha^2}$.
   En appliquant l'exponentielle, on a finalement $\alpha^2 = \exp\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

▶ **Exercice 4** 1. On a $I_0 = \int_0^{\pi} \sin(x)dx$.

Une primitive de sin étant $-\cos$, on a $I_0 = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$.

2. (a) Pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \in [0;\pi]$, $e^{-nx} > 0$ et $\sin(x) > 0$.
Ainsi, $e^{-nx}\sin(x) > 0$ et donc $I_n \geqslant 0$.

(b) Pour tout entier naturel n et pour tout réel x, $e^{-(n+1)x}\sin(x) - e^{-nx}\sin(x) = e^{-nx}\sin(x) \times (e^{-x} - 1)$.
Or, pour tout réel $x \in [0;\pi]$, $e^{-x} \leqslant 1$ et donc $e^{-x} - 1 \leqslant 0$.
Ainsi, pour tout $x \in [0;\pi]$, on a $e^{-(n+1)x}\sin(x) - e^{-nx}\sin(x) \leqslant 0$.
Alors $\int_0^{\pi} (e^{-(n+1)x}\sin(x) - e^{-nx}\sin(x))dx \leqslant 0$ soit $\int_0^{\pi} e^{-(n+1)x}\sin(x)dx - \int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(x)dx \leqslant 0$.
Finalement, $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

(c) D'après la question 2a, la suite (I_n) est minorée.
D'après la question 2b, la suite (I_n) est décroissante.
Ainsi, la suite (I_n) converge.

3. (a) Pour tout réel x, $\sin(x) \leqslant 1$.
Ainsi, pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \in [0;\pi]$, $e^{-nx}\sin(x) \leqslant e^{-nx}$.
En intégrant cette inégalité, on a donc $I_n \leqslant \int_0^{\pi} e^{-nx}dx$.

(b) Une primitive de $x \mapsto e^{-nx}$ est $x \mapsto -\dfrac{e^{-nx}}{n}$. Ainsi, $\int_0^{\pi} e^{-nx}dx = \left[-\dfrac{e^{-nx}}{x}\right]_0^{\pi} = \dfrac{1-e^{-n\pi}}{n}$.

(c) Ainsi, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n\pi}}{n}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-e^{-n\pi}}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.
D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4. (a) On rappelle que $I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(x)dx$.

D'une part, pour tout réel $x \in [0;\pi]$, on pose $\begin{cases} u(x) = e^{-nx} & u'(x) = -ne^{-nx} \\ v(x) = -\cos(x) & v'(x) = \sin(x) \end{cases}$

D'après la formule d'intégration par parties,

$$I_n = \left[-e^{-nx}\cos(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-ne^{-nx}) \times (-\cos(x))dx = 1 + e^{-n\pi} - n\int_0^{\pi} e^{-nx}\cos(x)dx = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n$$

D'autre part, pour tout réel $x \in [0;\pi]$, on pose $\begin{cases} w(x) = \sin(x) & w'(x) = \cos(x) \\ p(x) = -\dfrac{e^{-nx}}{n} & p'(x) = e^{-nx} \end{cases}$

D'après la formule d'intégration par parties,

$$I_n = \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\sin(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(-\frac{e^{-nx}}{n}\right)\cos(x)dx = 0 - 0 + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} e^{-nx}\cos(x)dx = \frac{1}{n}J_n$$

(b) On a donc $I_n = \dfrac{1}{n}J_n$ donc $J_n = nI_n$. Or, $I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n = 1 + e^{-n\pi} - n^2 I_n$.

Ainsi, $(n^2+1)I_n = 1 + e^{-n\pi}$ et finalement $I_n = \dfrac{1+e^{-n\pi}}{1+n^2}$

5.
```python
from math import *
def seuil():
  n = 0
  I = 2
  while I >= 0.1:
    n = n+1
    I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
  return n
```