# ∽ Baccalauréat Asie 23 mars 2023 ∾

# Sujet 1

# CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**EXERCICE 1** **5 points**

**Partie A**

1. **a.** Calculons : $u_1 = 0,9 \times u_0 + 60 = 0,9 \times 400 + 60 = 420$
   puis : $u_2 = 0,9 \times u_1 + 60 = 0,9 \times 420 + 60 = 438$.

   **b.** Avec ces premiers termes calculés (et en regardant les termes suivants à la calculatrice), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble être croissante.

2. Pour tout entier naturel $n$, on nomme $I_n$ l'inégalité : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600$.

   Démontrons par récurrence sa véracité :

   **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $u_0 = 400$ et $u_{0+1} = u_1 = 420$. À l'indice 0, on a donc effectivement : $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 600$ : l'inégalité $I_0$ est vraie.

   **Hérédité :** Pour un entier naturel $n$ quelconque, on suppose que l'inégalité $I_n$ est vraie. On a :

   $$\begin{aligned} I_n &\Longrightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600 \\ &\Longrightarrow 0 \times 0,9 \leqslant u_n \times 0,9 \leqslant u_{n+1} \times 0,9 \leqslant 600 \times 0,9 \qquad \text{car } 0,9 > 0 \\ &\Longrightarrow 0 + 60 \leqslant 0,9u_n + 60 \leqslant 0,9u_{n+1} + 60 \leqslant 540 + 60 \qquad \text{en ajoutant 60 à chaque membre} \\ &\Longrightarrow 60 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 600 \qquad \text{avec la relation de récurrence de la suite } (u_n) \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 600 \qquad \text{par transitivité, car } 0 \leqslant 60 \\ &\Longrightarrow I_{n+1} \end{aligned}$$

   La véracité de l'inégalité est donc héréditaire.

   **Conclusion :** L'inégalité est vraie à l'indice 0, et pour tout indice $n$ entier naturel, la véracité est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, on peut donc conclure que, pour tout entier naturel $n$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600$.

3. **a.** Tirons les conclusions de la question précédente pour la suite. On a :

   - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$. Autrement dit : la suite est croissante.
   - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 600$. Autrement dit : la suite est bornée par 0 et 600.

   La suite $(u_n)$ est donc croissante et majorée par 600, et donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente, vers une limite $\ell$, qui vérifie ici : $0 \leqslant \ell \leqslant 600$.

   **b.** Posons $f$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,9x + 60$.

   La suite $(u_n)$ est donc définie par récurrence, et la fonction de récurrence est la fonction $f$, définie ci-dessus. Or, la suite est convergente (d'après la question précédente) et la fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction affine). En vertu du théorème du point fixe, la limite $\ell$ de la suite est une des solutions à l'équation $f(x) = x$.

   Comme $f$ est une fonction affine, de coefficient directeur $0,9 \neq 1$, les droites d'équations $y = f(x)$ et $y = x$ sont donc sécantes, en un seul point, donc l'équation n'a qu'une seule solution, et on a déjà identifié une solution évidente : $f(600) = 600$, donc 600 est la seule solution de l'équation. Donc $\ell = 600$.

   La suite $(u_n)$ converge vers 600.

**4.** *Remarque :* La justification ci-après est assez longue, elle vise à vous aider à comprendre la fonction "mystère". Autant de détail n'est pas attendu sur votre copie, rassurez-vous. Vous pouvez notamment programmer la fonction sur votre calculatrice et donner ce qu'elle renvoie.

La fonction est ce que l'on appelle une fonction "seuil", c'est d'ailleurs le nom qui est donné à l'argument avec lequel on appelle la fonction.

Le principe de cette fonction, c'est d'utiliser deux variables : n et u, qui contiennent respectivement un indice $n$ et la valeur du terme $u_n$ correspondant.

Ainsi, dans la phase d'initialisation, on commence avec la variable n contenant l'indice 0, et la variable u contenant la valeur 400, c'est-à-dire $u_0$.

Ensuite, dans la boucle **while**, à chaque exécution de cette boucle, pour la variable n, on passe d'un indice $n$ à l'indice suivant $n+1$, et pour u, du terme $u_n$ à $0,9\times u_n+60$, c'est-à-dire à $u_{n+1}$.

Ceci va se poursuivre tant que le terme $u_n$ dont la valeur est stockée dans la variable u est inférieur ou égal au seuil. Autrement dit, on s'arrête dès que u contient un terme de la suite strictement supérieur au seuil.

La fonction renvoie alors l'indice correspondant audit terme.

Avec la commande mystere(500) dans la console Python, on a donc 7, car $u_6\approx 494$ et $u_7\approx 504$. (Ces valeurs sont obtenues à la calculatrice.)

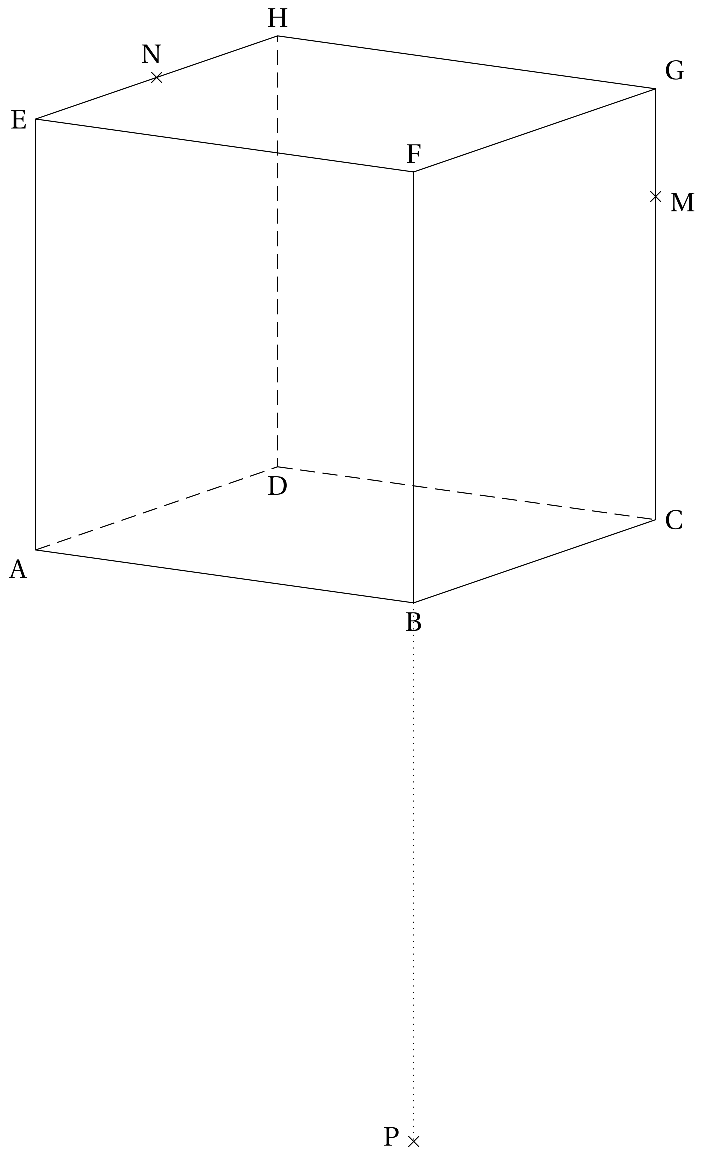
**Partie B**

Puisque, chaque année l'arboriculteur vend 10 % des arbres de son verger, il lui en reste donc 90 % et puis il replante 60 nouveaux arbres. Si on appelle $(u_n)$ une suite donnant le nombre d'arbres dans son verger, la suite aura la relation de récurrence $u_{n+1}=0,9u_n+60$, comme la suite qui a été étudiée dans la partie A.
Le verger compte 400 arbres en 2023, donc si on précise que $u_n$ représente le nombre d'arbre plantés dans le verger en $(2023+n)$, alors on a $u_0=400$ et la suite est effectivement exactement la suite étudiée dans la partie A.
S'il conserve ce rythme de plantation, alors notre étude dit que le nombre d'arbres dans son verger va croître et se stabiliser aux alentours de 600 arbres, c'est donc problématique, car il est limité à 500 arbres.
Notamment, à ce rythme, la fonction Python mystère nous a appris que à l'indice 7 c'est-à-dire en 2023 + 7 = 2030, le nombre d'arbres dans le verger serait strictement supérieur à 500 (environ 504 arbres), donc il devra modifier son rythme de plantation à ce moment là.

**EXERCICE 2** **5 points**

**1.** On a les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{\text{MN}}\begin{pmatrix}x_{\text{N}}-x_{\text{M}}\\y_{\text{N}}-y_{\text{M}}\\z_{\text{N}}-z_{\text{M}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

**2.** On obtient la figure suivante :




**3.** Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont clairement non colinéaires (l'abscisse de l'un est nulle sans que celle l'autre ne le soit), donc les trois points M, N et P sont non alignés, et définissent donc un plan.

**4.** **a.** Puisque le repère est orthonormé, on va calculer le produit scalaire avec les coordonnées :
$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = (-1) \times 0 + \left(\dfrac{-1}{2}\right) \times (-1) + \dfrac{1}{4} \times (-2) = 0 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0.$

Les vecteurs sont donc orthogonaux et non nuls, donc l'angle qu'ils définissent est un angle droit. On en déduit que le triangle est rectangle en M.

Calculons les longueurs MN et MP :

$\text{MN} = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{21}}{4}.$ $\qquad$ $\text{MP} = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

Comme MN $\neq$ MP, le triangle est seulement un triangle rectangle en M (il n'est pas isocèle).

**b.** L'aire du triangle MNP est la moitié du produit de la longueur d'une base par la longueur de la hauteur correspondante.

Comme le triangle est rectangle en M, on choisit [MN] comme base et donc [MP] est donc la hauteur correspondante.

L'aire du triangle est donc $\mathscr{A}_{\text{MNP}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{21}}{4} \times \sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{105}}{8}$

**5.** **a.** Avec $\overrightarrow{n}(5\ ;\ -8\ ;\ 4)$ on a :

$\overrightarrow{\text{MN}} \cdot \overrightarrow{n} = (-1) \times 5 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times (-8) + \dfrac{1}{4} \times 4 = -5 + 4 + 1 = 0$

$\overrightarrow{\text{MP}} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \times 5 + (-1) \times (-8) + (-2) \times 4 = 0 + 8 - 8 = 0$

Le vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (MNP), il est donc orthogonal au plan.

C'est donc un vecteur normal de (MNP).

**b.** On en déduit que le plan (MNP) a une équation cartésienne de la forme $5x-8y+4z+d = 0$, où $d$ est un nombre réel.

Comme M ∈ (MNP), $d$ est tel que :

$$\begin{aligned} 5x_{\text{M}} - 8y_{\text{M}} + 4z_{\text{M}} + d = 0 &\iff 5 \times 1 - 8 \times 1 + 4 \times \dfrac{3}{4} + d = 0 \\ &\iff 5 - 8 + 3 + d = 0 \\ &\iff d = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (MNP) est donc bien $5x - 8y + 4z = 0$.

**6.** Si une droite est orthogonale au plan (MNP), c'est donc qu'elle est dirigée par un vecteur normal à (MNP), donc $\overrightarrow{n}$, par exemple.

Le point F a pour coordonnées F(1; 0; 1) et $\overrightarrow{n}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{n}(5\ ;\ -8\ ;\ 4)$ et donc la droite passant par F et dirigée par $\overrightarrow{n}$ admet pour représentation paramétrique le système : $\left\{\begin{array}{l} x = x_{\text{F}} + t x_{\overrightarrow{n}} \\ y = y_{\text{F}} + t y_{\overrightarrow{n}} \\ z = z_{\text{F}} + t z_{\overrightarrow{n}} \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$, soit, ici : $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 5t \\ y = \quad -8t \\ z = 1 + 4t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$

**7.** Si L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP), alors, c'est que L est l'intersection du plan (MNP) avec la droite $d$, orthogonale à (MNP) et passant par F.

Si on considère le point $L_t$, de paramètre $t$ sur la droite $d$, cherchons la valeur du paramètre $t$ pour que $L_t \in$ (MNP).

$$\begin{aligned} L_t \in (\text{MNP}) &\iff 5x_{L_t} - 8y_{L_t} + 4z_{L_t} = 0 \\ &\iff 5(1+5t) - 8(-8t) + 4(1+4t) = 0 \\ &\iff 5 + 25t + 64t + 4 + 16t = 0 \\ &\iff 105t + 9 = 0 \\ &\iff t = \dfrac{-9}{105} = \dfrac{-3}{35} \end{aligned}$$

Le point de paramètre $\dfrac{-3}{35}$ sur $d$ a pour coordonnées : $\left(1 + 5 \times \dfrac{-3}{35}\ ;\ -8 \times \dfrac{-3}{35}\ ;\ 1 + 4 \times \dfrac{-3}{35}\right)$, c'est donc bien le point L, de coordonnées $\text{L}\left(\dfrac{4}{7}\ ;\ \dfrac{24}{35}\ ;\ \dfrac{23}{35}\right)$.

**8.** On a donc $\overrightarrow{\text{FL}}\begin{pmatrix} \frac{-3}{7} \\ \frac{24}{35} \\ \frac{-12}{35} \end{pmatrix}$ et donc $\text{FL} = \sqrt{\left(\dfrac{-3}{7}\right)^2 + \left(\dfrac{24}{35}\right)^2 + \left(\dfrac{-12}{35}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{105}}{35}$.

Pour calculer le volume du tétraèdre FMNP, on va considérer le triangle MNP comme étant la base, avec $\mathscr{A}_{\text{MNP}} = \dfrac{\sqrt{105}}{8}$.

La hauteur correspondante est donc la distance du quatrième sommet F au plan contenant la base, c'est-à-dire le plan (MNP). D'après la question **7.**, c'est donc la distance FL, que l'on vient de calculer.

On a donc $V_{\text{FMNP}} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}_{\text{MNP}} \times \text{FL} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{105}}{8} \times \dfrac{3\sqrt{105}}{35} = \dfrac{105}{8 \times 35} = \dfrac{3 \times 35}{8 \times 35} = \dfrac{3}{8}$

Le volume de FMNP est donc de $\dfrac{3}{8}$.

## EXERCICE 3 — 5 points

**1. Conjectures graphiques :**

Le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$ :

- pour $k = 1$, l'équation ne semble pas avoir de solution, car il semble que la droite d'équation $y = x$ ne coupe pas la courbe représentative de la fonction ln;
- pour $k = 0,2$, l'équation semble avoir deux solutions, car la droite d'équation $y = 0,2x$ semble couper la courbe représentative de la fonction ln en deux endroits distincts.

**2.** Étude du cas $k = 1$ :

**a.** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, en tant que différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel $x$ strictement positif, on a :
$f'(x) = \ln'(x) - 1 = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.

**b.** On va donc étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations, au sein d'un tableau. Comme les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues, on ne va pas les déterminer.

Sur $\mathbb{R}^{*+}$, $x$ est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - x$.

$1 - x > 0 \iff x < 1$. $\quad f(1) = \ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$.

On a donc :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| variations de $f$ | ‖ | ↗ | $-1$ | ↘ | |

**c.** On en déduit que sur son ensemble de définition, $f$ atteint un maximum égal à $-1$ pour $x = 1$, donc $f$ est à valeurs strictement négatives sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Il n'y a donc aucune solution à l'équation $f(x) = 0$, or $f(x) = 0 \iff \ln(x) = x$, donc l'équation $\ln(x) = x$ n'admet aucune solution.

**3.** Étude du cas général :

**a.** Discutons du nombre de solutions :

- Si $g\left(\dfrac{1}{k}\right) < 0$, alors la fonction $g$ a pour maximum un nombre réel strictement négatif, donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution.

- Si $g\left(\dfrac{1}{k}\right) = 0$, alors l'équation admet clairement $\dfrac{1}{k}$ comme solution et cette solution est la seule, car : $g$ étant strictement croissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{k}\right]$, $x < \dfrac{1}{k} \implies g(x) < g\left(\dfrac{1}{k}\right)$ et donc $g(x) < 0$.
  Et $g$ étant strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{k}\,;\,+\infty\right[$, $x > \dfrac{1}{k} \implies g(x) < g\left(\dfrac{1}{k}\right)$ et donc $g(x) < 0$.
  Ainsi, l'équation admet une unique solution dans ce cas.
- Si $g\left(\dfrac{1}{k}\right) > 0$, alors :
  $f$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{k}\right]$, et 0 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{x\to 0} g = -\infty$ et $g\left(\dfrac{1}{k}\right) > 0$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur cet intervalle.
  Puis, de façon analogue, on applique le même théorème sur $\left]\dfrac{1}{k}\,;\,+\infty\right[$, où $g$ est continue et strictement décroissante pour faire émerger une seconde solution $\beta$, la seule sur $\left]\dfrac{1}{k}\,;\,+\infty\right[$.
  Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans ce cas.

**b.** On rappelle que $k$ est un réel strictement positif, donc $\dfrac{1}{k}$ l'est aussi, et donc $\dfrac{1}{k}$ est dans l'ensemble de définition de $g$. On a $g\left(\dfrac{1}{k}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{k}\right) - k \times \dfrac{1}{k} = -\ln(k) - 1$.

**c.** On a : $g\left(\dfrac{1}{k}\right) > 0 \iff -\ln(k) - 1 > 0.$

$$\iff -\ln(k) > 1$$
$$\iff \ln(k) < -1$$

Nous parvenons bien à l'équivalence demandée.

**d.** On remarque que $g(x) = 0 \iff \ln(x) = kx$.

L'ensemble des valeurs de $k$ pour lesquelles l'équation $\ln(x) = kx$ possède exactement deux solutions est donc constitué des nombres $k$ vérifiant $\ln(k) < -1$, d'après la question précédente.

$\ln(k) < -1 \iff k < \mathrm{e}^{-1}$.

L'ensemble des valeurs $k$ cherché est donc $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right[$

**e.** En synthèse des questions précédentes, on peut donc dire que l'équation $\ln(x) = kx$ :

- admet exactement deux solutions pour $k \in \left]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right[$ ;
- admet une unique solution pour $k = \mathrm{e}^{-1}$ ;
- n'admet aucune solution pour $k \in \left]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[$ ;

*Remarque :* Ce résultat confirme nos conjectures du début de problème, dans la mesure où $0,2 \in \left]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right[$ et $1 \in \left]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[$ (en effet $\mathrm{e}^{-1} \approx 0,4$).

## EXERCICE 4 — 5 points

Pour ce QCM, aucune justification n'est attendue, dans ce corrigé, on en donne quand même.
Pour ce problème il convient de bien visualiser la situation. Nous avons des billes prélevées au hasard dans l'urne, et les billes sont indiscernables au toucher, donc nous sommes dans une situation d'équiprobabilité : chaque bille a une probabilité égale à $\dfrac{1}{15}$ d'être choisie dans l'urne.
On peut donc avoir la visualisation suivante :

| n° bille | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| couleur | $R$ | $B$ | $B$ | $B$ | $B$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $G =$ | $-10$ | $-4$ | $-1$ | 2 | 5 | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Chaque colonne de ce tableau a une probabilité de $\dfrac{1}{15}$.

**Question 1 : réponse B**

Pour que la bille tirée soit bleue ou numérotée d'un nombre pair, il faut avoir choisi une bille dont le numéro est dans $\{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 8\ ;\ 10\ ;\ 12\ ;\ 14\}$, il y a donc 9 issues favorables, parmi 15 issues possibles, la probabilité est de $\dfrac{9}{15}$.

**Question 2 : Réponse C**

Il y a une seule bille verte portant le numéro 7, et il y a dix billes vertes, donc la probabilité est $\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{10}{15}} = \dfrac{1}{10}$.

**Question 3 : réponse B**

L'événement (G = 5) est réalisé par un choix de bille portant le numéro 5 (bille bleue donc on a : $G = 3 \times 5 - 10 = 5$) ou le numéro 15 (bille verte donc $G = 15 - 10 = 5$). Il y a donc deux issues favorables sur 15 issues possibles : la probabilité est de $\dfrac{2}{15}$.

**Question 4 : Réponse A**

L'événement $(G = 0)$ est réalisé uniquement par le choix de la bille numérotée 10.
Comme cette bille est verte, cela implique que l'événement $(G = 0) \cap R$ est impossible, donc sa probabilité est nulle et donc, en divisant ce 0 par $P(R)$, on obtient encore 0.

**Question 5 : Réponse C**

L'événement $(G = -4)$ est réalisé par les billes numérotées 2 et 6, la première est bleue et la seconde est verte, donc $P_{(G=-4)}(V) = \dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{15}} = \dfrac{1}{2}$.