

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

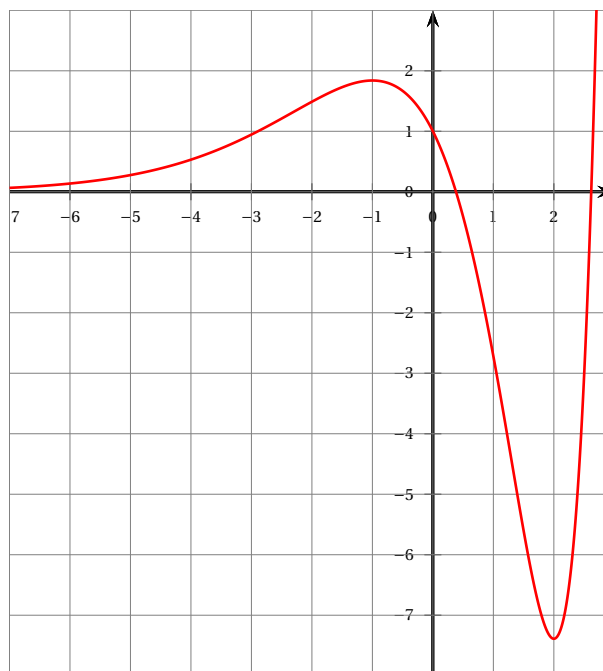
5 points

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

On considère une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} . On note f' sa fonction dérivée.

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f' .



1. Le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} est donné par le signe de la dérivée f' .
 - Sur $] -\infty ; 0,4[$, $f' > 0$ donc f est strictement croissante.
 - Sur $]0,4 ; 2,6[$, $f' < 0$ donc f est strictement décroissante.
 - Sur $]2,6 ; +\infty[$, $f' > 0$ donc f est strictement croissante.
2. La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels la dérivée f' est croissante, soit sur $] -\infty ; -1[$ et sur $]2 ; +\infty[$.

Partie B

On admet que la fonction f de la partie A est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 - 5x + 6)e^x$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. a. On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x + 6) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x + 6)e^x = +\infty$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- b. On détermine la limite de la fonction f en $-\infty$.

$$\text{Pour } x \neq 0, f(x) = x^2 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} \right) e^x = x^2 e^x \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right) = 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

2. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$f'(x) = (2x - 5)e^x + (x^2 - 5x + 6) \times e^x = (2x - 5 + x^2 - 5x + 6)e^x = (x^2 - 3x + 1)e^x$$

3. Pour déterminer le sens de variation de la fonction f , on étudie le signe de $f'(x)$.

Pour tout x , $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 3x + 1$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0; x' = \frac{-(-3) - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x'' = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$		
$x^2 - 3x + 1$		+	0	-	0	+
e^x		+		+		+
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f		croissante		décroissante		croissante

4. La tangente (\mathcal{T}) à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0 a pour équation réduite :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

- $f(x) = (x^2 - 5x + 6)e^x$ donc $f(0) = 6e^0 = 6$
- $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$ donc $f'(0) = 1e^0 = 1$

\mathcal{T} a pour équation réduite $y = 1(x - 0) + 6$ soit $y = x + 6$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f . On admet que, pour tout réel x , on a $f''(x) = (x + 1)(x - 2)e^x$.

5. a. Pour étudier la convexité de la fonction f sur \mathbb{R} , on étudie le signe de $f''(x)$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$x + 1$		-	0	+		
$x - 2$		-	-	0	+	
e^x		+	+	+		
$f''(x)$		+	0	-	0	+
f		convexe		concave		convexe

b. Sur $[-1 ; 2]$, la fonction f est concave donc la courbe \mathcal{C} est en dessous de ses tangentes, et en particulier en dessous de la tangente \mathcal{T} car $0 \in [-1 ; 2]$.

Donc, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1 ; 2]$, on a $f(x) \leq x + 6$.

EXERCICE 2

5 points

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.

En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) , où n désigne le rang de l'année à partir de 2023. L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1 700$ et $b_0 = 1 300$.

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe;
- chaque année, 15% des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B;
- chaque année, 10% des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. D'après le texte :

- $a_1 = a_0 - \frac{15}{100}a_0 + \frac{10}{100}b_0 = 1700 - 255 + 130 = 1575$
- $b_1 = b_0 - \frac{10}{100}b_0 + \frac{15}{100}a_0 = 1300 - 130 + 255 = 1425$

2. Comme on suppose que durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe, on a, pour tout entier naturel n , $a_n + b_n = 3000$.

3. D'après le texte, on a : $a_{n+1} = a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100}b_n$.

Or $a_n + b_n = 3000$ donc $b_n = 3000 - a_n$. On a alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100}(3000 - a_n) = a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100} \times 3000 - \frac{10}{100}a_n \\ &= a_n - \frac{25}{100}a_n + 300 = \frac{75}{100}a_n + 300 = 0,75a_n + 300 \end{aligned}$$

4. a. Soit la propriété : $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$.

• **Initialisation**

$$a_0 = 1700 \text{ et } a_1 = 1575 \text{ donc } 1200 \leq a_1 \leq a_0 \leq 1700$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

• **Hérédité**

On suppose la propriété vraie au rang n , soit $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$; c'est l'hypothèse de récurrence.

$$1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$$

$$\Leftrightarrow 0,75 \times 1200 \leq 0,75 \times a_{n+1} \leq 0,75 \times a_n \leq 0,75 \times 1700$$

$$\Leftrightarrow 900 \leq 0,75 \times a_{n+1} \leq 0,75 \times a_n \leq 1275$$

$$\Leftrightarrow 900 + 300 \leq 0,75 \times a_{n+1} + 300 \leq 0,75 \times a_n + 300 \leq 1275 + 300$$

$$\Leftrightarrow 1200 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq 1575$$

$$\text{Or } 1575 \leq 1700 \text{ donc } 1200 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq 1700.$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$ donc elle est héréditaire.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$; donc d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

On a donc démontré que, pour tout n , $1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700$.

b. Étude de la convergence de la suite (a_n) .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_n$ donc la suite (a_n) est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1200 \leq a_n$ donc la suite (a_n) est minorée.

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout n par $v_n = a_n - 1200$; donc $a_n = v_n + 1200$.

$$\begin{aligned} \text{a. } v_{n+1} &= a_{n+1} - 1200 = 0,75a_n + 300 - 1200 = 0,75(v_n + 1200) - 900 \\ &= 0,75v_n + 900 - 900 = 0,75v_n \end{aligned}$$

$$v_0 = a_0 - 1200 = 1700 - 1200 = 500$$

Donc (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,75$.

- b. On en déduit que, pour tout n , on a : $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,75^n$.
- c. On sait que, pour tout n , $a_n = v_n + 1200$, donc $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$.
6. a. $-1 < 0,75 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$; on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 500 \times 0,75^n = 0$ et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1200$.
- b. On peut donc dire qu'à long terme, le nombre de sportifs dans le club A va tendre vers 1200, et donc que le nombre de sportifs dans le club B va tendre vers $3000 - 1200 = 1800$.
7. a. On complète le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1700
    while A >= 1280 :
        n = n + 1
        A = 0.75 * A + 300
    return
```

- b. La valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil est la plus petite valeur de n telle que $a_n < 1280$. On résout cette inéquation.

$$\begin{aligned}
 a_n < 1280 &\iff 500 \times 0,75^n + 1200 < 1280 \iff 500 \times 0,75^n < 80 \\
 &\iff 0,75^n < \frac{80}{500} \iff \ln(0,75^n) < \ln(0,16) \iff n \ln(0,75) < \ln(0,16) \\
 &\iff n > \frac{\ln(0,16)}{\ln(0,75)}
 \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(0,16)}{\ln(0,75)} \approx 6,38$ donc la valeur de n renvoyée par la fonction seuil est 7.

EXERCICE 3

5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm, on considère les points

$$D(3; 1; 5), \quad E(3; -2; -1), \quad F(-1; 2; 1), \quad G(3; 2; -3)$$

1. a. Le vecteur \vec{EF} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-(-2) \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Le vecteur } \vec{FG} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 2-2 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- b. $-4 \times (-1) = 4$ et $4 \times (-1) = -4 \neq 0$ donc les vecteurs \vec{EF} et \vec{FG} ne sont pas colinéaires; on en déduit que les points E, F et G ne sont pas alignés.
2. a. La droite (FG) passe par le point F et a pour vecteur directeur \vec{FG} ; elle a donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_F + 4t \\ y = y_F + 0t \\ z = z_F + (-4)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 \\ z = 1 - 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- b. On appelle H le point de coordonnées $(2; 2; -2)$.

H est le projeté orthogonal de E sur la droite (FG) si H appartient à la droite (FG) et si les vecteurs \vec{EH} et \vec{FG} sont orthogonaux.

- Le point H appartient à la droite (FG) si on peut trouver une valeur de t

$$\text{telle que : } \begin{cases} x_H = -1 + 4t \\ y_H = 2 \\ z_H = 1 - 4t \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 2 = -1 + 4t \\ 2 = 2 \\ -2 = 1 - 4t \end{cases}$$

La valeur $t = \frac{3}{4}$ convient donc le point H appartient à la droite (FG).

- Le vecteur \overrightarrow{EH} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2-3 \\ 2-(-2) \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et \overrightarrow{FG} a pour co-

$$\text{ordonnées} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FG} = (-1) \times 4 + 4 \times 0 + (-1) \times (-4) = 0 \text{ donc } \overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{FG}$$

Le point H est donc le projeté orthogonal du point E sur la droite (FG).

- c. D'après les questions précédentes, [EH] est la hauteur du triangle EFG correspondant à la base [FG]; donc l'aire du triangle EFG vaut, en cm^2 :

$$\mathcal{A} = \frac{EH \times FG}{2}.$$

- $\overrightarrow{EH} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $EH = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

- $\overrightarrow{FG} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $FG = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Donc l'aire du triangle est en cm^2 : $\mathcal{A} = \frac{3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2} = 12.$

3. a. Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFG) s'il est orthogonal à \overrightarrow{EF}

et à \overrightarrow{FG} .

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 2 \times (-4) + 1 \times 4 + 2 \times 2 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{EF}$
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{FG} = 2 \times 4 + 1 \times 0 + 2 \times (-4) = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{FG}$

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan (EFG).

- b. $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFG), donc le plan (EFG) a une équation

de la forme $2x + y + 2z + d = 0$ où d est un réel à déterminer.

F est un point de (EFG) donc $2x_F + y_F + 2z_F + d = 0$ c'est-à-dire $2 \times (-1) + 2 + 2 \times 1 + d = 0$ ce qui donne $d = -2$.

Le plan (EFG) a donc pour équation $2x + y + 2z - 2 = 0$.

- c. La droite (d) passant par le point D et orthogonale au plan (EFG) a pour vecteur directeur tout vecteur normal au plan (EFG) donc en particulier le vecteur \vec{n} . Elle a donc pour représentation paramétrique;

$$\begin{cases} x = x_D + x_{\vec{n}} t \\ y = y_D + y_{\vec{n}} t \\ z = z_D + z_{\vec{n}} t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- d. On note K le projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG). Le point K appartient donc à la droite (d) et au plan (EFG) donc ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 2t \\ 2x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

On a donc t tel que $2(3 + 2t) + (1 + t) + 2(5 + 2t) - 2 = 0$, soit

$$6 + 4t + 1 + t + 10 + 4t - 2 = 0 \text{ ou encore } 9t + 15 = 0; \text{ ce qui donne } t = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}.$$

On a donc : $x_K = 3 + 2t = 3 + 2\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{3}$, $y_K = 1 + t = 1 + \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{2}{3}$ et

$$z_K = 5 + 2t = 5 + 2\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

Donc le point K a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

4. a. $DK^2 = \left(-\frac{1}{3} - 3\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 5\right)^2 = \left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2$
 $= \frac{100}{9} + \frac{25}{9} + \frac{100}{9} = \frac{225}{9} = 25$

Donc la distance DK est égale à 5 cm.

- b. Le volume du tétraèdre DEFG est donné par la formule : $\frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

Une base du tétraèdre est le triangle EFG d'aire 12, et la hauteur relative à cette base est [DK] de longueur 5.

Le volume du tétraèdre DEFG est donc, en cm^3 : $\frac{12 \times 5}{3} = 20$.

EXERCICE 4

5 points

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = 0,05 - \frac{\ln x}{x-1}$.

La limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à :

- a. $+\infty$ b. 0,05 c. $-\infty$ d. 0

$$\left\| \begin{array}{l} f(x) = 0,05 - \frac{\ln x}{x-1} = 0,05 - \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x-1} \\ \text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x-1} = 0. \\ \text{On en déduit que } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,05. \end{array} \right.$$

Réponse b.

2. On considère une fonction h continue sur $[-2; 4]$ telle que : $h(-1) = 0$, $h(1) = 4$, $h(3) = -1$.

On peut affirmer que :

- a. la fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1; 1]$.
 b. la fonction h est positive sur l'intervalle $[-1; 1]$.
 c. il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[1; 3]$ tel que $h(a) = 1$.
 d. l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2; 4]$.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{C'est l'application du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle} \\ [1; 3]. \end{array} \right.$$

Réponse c.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ et } (v_n) \text{ converge vers } 0.$$

On peut affirmer que :

- a. la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge.
- b. la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge.
- c. la suite (u_n) est croissante.
- d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n)^n = -\infty$

|| Limite du quotient de deux suites.

Réponse b.

4. Pour participer à un jeu, un joueur doit payer 4 €.

Il lance ensuite un dé équilibré à six faces :

- s'il obtient 1, il remporte 12 €;
- s'il obtient un nombre pair, il remporte 3 €;
- sinon, il ne remporte rien.

En moyenne, le joueur :

- a. gagne 3,50 €
- b. perd 3 €.
- c. perd 1,50 €
- d. perd 0,50 €.

|| Soit X la variable aléatoire qui donne le gain (mise moins ce que l'on gagne); on cherche l'espérance mathématique de cette variable aléatoire.

tirage	nombre 1	nombre pair	autre
gain	$12 - 4 = 8$	$3 - 4 = -1$	$0 - 4 = -4$
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

$$E(X) = 8 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{3}{6} + (-4) \times \frac{2}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \text{ ce qui correspond à une perte de } 0,50 \text{ €.}$$

Réponse d.

5. On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(3; p)$.

On sait que $P(X = 0) = \frac{1}{125}$. On peut affirmer que :

- a. $p = \frac{1}{5}$
- b. $P(X = 1) = \frac{124}{125}$
- c. $p = \frac{4}{5}$
- d. $P(X = 1) = \frac{4}{5}$

$$|| P(X = 0) = \binom{3}{0} \times p^0 \times (1-p)^{3-0} = (1-p)^3$$

$$|| \text{On a donc } (1-p)^3 = \frac{1}{125} \iff (1-p)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \iff 1-p = \frac{1}{5}; \text{ donc } p = \frac{4}{5}.$$

Réponse c.