✂ –

BREVET — 2021 — CENTRES ÉTRANGERS — SÉRIE GÉNÉRALE

CORRECTION

Un sujet assez exigeant qui parcoure de nombreuses compétences de fin de cycle 4. L'exercice de probabilité est un peu décevant : c'est une situation souvent abordée en classe. L'avant dernier exercice demande un calcul de pente. Il est assez complet en terme de géométrie. On termine avec un exercice de forfait avec une fonction affine, une linéaire et une fonction constante. C'est un bon sujet de préparation au brevet.

EXERCICE nº 1 — Cinq questions indépendantes *24 points*

Arithmétique — Transformations — Fractions — Écriture scientifique — Volume — Trigonométrie — Aire

Un exercice assez simple qui mélange des notions disparates.

Aucune justification est demandée. J'ajouterai cependant quelques commentaires pour rendre la lecture de cette correction plus intéressante.

1.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$\boxed{360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \text{ donc } 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5}$

2.a L'image du point B par la symétrie d'axe (BD) est le point B.
Comme le point J est sur la droite (BD) sont image est lui-même aussi J.
L'image du point E par rapport à la droite (BD) est le point F.

$\boxed{\text{L'image du triangle BEJ par la symétrie d'axe (BD) est donc le triangle BJF.}}$

2.b. La translation considérée transforme le point A en le point E.
Elle transforme le point M en le point F et le point H en le point M.
Dans chacun des cas précédent on a bien le parallélisme, l'égalité des longueurs et le sens de la translation.

$\boxed{\text{L'image du triangle AMH par la translation qui transforme E en B est le triangle EFM.}}$

2.c. On remarque que le triangle AMD est un agrandissement du triangle AIH. Il est précisement deux fois plus grands. De plus le point A est commun au deux triangles.

$\boxed{\text{Le triangle AMD est l'image du triangle AIH par l'homothétie de centre A et de coefficient 2.}}$

3. $A = \dfrac{7}{2} + \dfrac{15}{6} \times \dfrac{7}{25}$ donc $A = \dfrac{7}{2} + \dfrac{15 \times 7}{6 \times 25}$ d'où $A = \dfrac{7}{2} + \dfrac{5 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 5 \times 5}$ et $A = \dfrac{7}{2} + \dfrac{7}{10}$ puis $A = \dfrac{7 \times 5}{2 \times 5} + \dfrac{7}{10}$

$A = \dfrac{35}{10} + \dfrac{7}{10}$ et $A = \dfrac{42}{10}$ enfin $A = \dfrac{2 \times 21}{2 \times 5}$ ainsi $\boxed{A = \dfrac{21}{5}}$

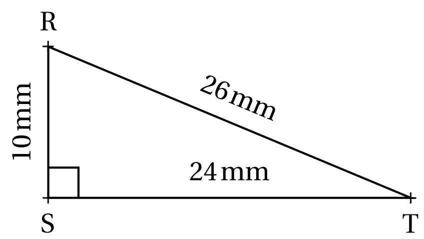
4. On modélise la Lune comme une boule de diamètre 3 474 km soit un rayon de 1 737 km.
On sait que le volume d'une boule de rayon R est donnée par la formule :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Dans ce cas on obtient $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times (1\,737\,\text{km})^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 5\,240\,822\,553\,\text{km}^3 = 6\,987\,763\,404\pi\ km^3$

Une valeur approchée de ce résultat en écriture scientifique est $\boxed{V \approx 2{,}195 \cdot 10^{10}\,\text{km}^3 \approx 2{,}2 \cdot 10^{10}\,\text{km}^3}$

5. Voici ce triangle :



Juste par acquis de conscience on peut vérifier que ce triangle est bien rectangle puisque $10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676$ et que $26^2 = 676$.

Dans ce triangle rectangle on peut calculer le sinus, le cosinus ou la tangente de l'angle $\widehat{STR}$, au choix :

$\cos\widehat{STR} = \dfrac{ST}{RT} = \dfrac{24\,\text{mm}}{26\,\text{mm}} = \dfrac{12}{13}$ $\quad\sin\widehat{STR} = \dfrac{RS}{RT} = \dfrac{10\,\text{mm}}{26\,\text{mm}} = \dfrac{5}{13}$ $\quad\tan\widehat{STR} = \dfrac{RS}{RT} = \dfrac{10\,\text{mm}}{24\,\text{mm}} = \dfrac{5}{12}$

Dans les trois cas à la calculatrice on arrive à $\boxed{\widehat{STR} \approx 23°}$

Comme les angles $\widehat{STR}$ et $\widehat{SRT}$ sont complémentaires (leur somme vaut 90°) on a $\boxed{\widehat{SRT} \approx 90° - 23° \approx 67°.}$

Le périmètre du triangle $\boxed{\mathscr{P} = RS + ST + TR = 10\,\text{mm} + 24\,\text{mm} + 26\,\text{mm} = 60\,\text{mm}}$

L'aire du triangle $\boxed{\mathscr{A} = \dfrac{RS \times ST}{2} = \dfrac{24\,\text{mm} \times 10\,\text{mm}}{2} = \dfrac{240\,\text{mm}^2}{2} = 120\,\text{mm}^2}$

Longueurs	**Angles**	**Périmètre du triangle** RST	**Aire du triangle** RST
RS = 10 mm	$\widehat{RST} = 90°$		
ST = 24 mm	$\widehat{STR} \approx 23°$	$\mathscr{P} = 60\,\text{mm}$	$\mathscr{A} = 120\,\text{mm}^2$
RT = 26 mm	$\widehat{SRT} \approx 67°$		

Exercice n° 2 — Lancer de dés *21 points*

Probabilités

Un exercice très classique qui est d'ailleurs souvent présenté en classe pendant le cours de probabilités.

Partie 1

1. Il y a six issues possibles : $\boxed{\text{« Obtenir 1 », « Obtenir 2 », « Obtenir 3 », « Obtenir 4 », « Obtenir 5 », « Obtenir 6 »}}$

2. Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité puisque le dé est équilibré. Il y a donc une chance sur six pour chaque issue.

$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir 2 est } \frac{1}{6} \approx 0,167 \text{ soit environ } 16,7\ \%}$

3. L'événement **B** est constitué de trois issues : « Obtenir 1 », « Obtenir 3 »et « Obtenir 5 ».

$\boxed{\text{La probabilité de l'événement } \mathbf{B} \text{ est } \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ soit } 50\ \%.}$

Partie 2

1. Le plus grand « score »possible en faisant la somme de deux dés numérotés de 1 à 6 est 12.

$\boxed{\text{La probabilité de l'événement } \mathbf{C} \text{ est 0 : c'est l'événement impossible.}}$

2.a.

Dé vert / Dé rouge	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2.b. $\boxed{\text{Les scores possibles sont : } 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7 — 8 — 9 — 10 — 11 — 12}$

3.a. On constate en regardant le tableau qu'il y a 36 issues équiprobables possibles.
L'événement **D** est constitué des trois issues suivantes : $6+4$, $5+5$ et $4+6$.

$\boxed{\text{La probabilité de l'événement D est } \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 0,083 \text{ soit environ } 8,3\ \%}$

3.b. Le score est un multiple de 4 si il vaut 4, 8 ou 12.
L'événement **E** est constitué des neuf issues suivantes : $1+3=4$, $2+2=4$, $3+1=4$, $2+6=8$, $3+5=8$, $4+4=8$, $5+3=8$, $6+2=8$ et $6+6=12$.

$\boxed{\text{La probabilité de l'événement E est } \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ soit } 25\ \%.}$

3.c. L'événement « le score est un nombre premier »est constitué des scores 2, 3, 5, 7 et 11.

Les issues pour obtenir ces scores sont : $1+1=2$, $1+2=3$, $2+1=3$, $1+4=5$, $2+3=5$, $3+2=5$, $4+1=5$, $1+6=7$, $2+5=7$, $3+4=7$, $4+3=7$, $5+2=7$, $6+1=7$, $5+6=11$ et $6+5=11$. Il y a 15 issues !

L'événement « le score est strictement plus grand que 7 »est constitué des scores 8, 9, 10, 11 et 12.
Les issues pour obtenir ces scores sont : $2+6=8$, $3+5=8$, $4+4=8$, $5+3=8$, $6+2=8$, $3+6=9$, $4+5=9$, $5+4=9$, $6+3=9$, $4+6=10$, $5+5=10$, $6+4=10$, $5+6=11$, $6+5=11$ et $6+6=12$. Il y a 15 issues !

15 issues favorables : les probabilités des deux événements sont égales à $\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}\approx 0,417$ soit environ 41,7 %

EXERCICE n° 3 — Les trois programmes de calcul *16 points*

Scratch — Programme de calcul

Encore un exercice très classique qui mélange Scratch et programme de calcul. Une équation produit à résoudre et une équation du premier degré.

1.a. En prenant le nombre 1 avec le **Programme A** on obtient successivement :
1 — $1+1=2$ — $3\times 2=6$ puis $6-3=3$.

Ne prenant 1 avec le **Programme A** affiche « On obtient 3 »pendant 2 secondes.

1.b. En prenant le nombre 2 avec le **Programme B** on obtient successivement :
2 — $2+3=5$ d'une part et $2-5=-3$ d'autre part puis $5\times(-3)=-15$.

Ne prenant 2 avec le **Programme B** affiche « On obtient -15 »pendant 2 secondes.

2. En prenant le nombre générique x pour nombre de départ dans le **Programme C** on obtient successivement :
x — $7x$ — $7x+3$ — $7x+3-x=6x+3$.

En prenant x comme nombre générique au départ du **Programme C** on obtient l'expression $6x+3$.

3. Prenons x comme nombre générique de départ dans le **Programme A** on obtient successivement :
x — $x+1$ puis $3\times(x+1)=3x+3$ et enfin $3x+3-3=3x$.

Prenons x comme nombre générique de départ dans le **Programme B** on obtient successivement :
x — $x+3$ d'une part et $x-5$ d'autre part et enfin $(x+3)(x-5)$.

En observant les trois expressions obtenues on constante que Le **Programme A** renvoit le triple du nombre de départ.

4.a.

$$(x+3)(x-5)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$x+3=0 \qquad\qquad x-5=0$$
$$x+3-3=0-3 \qquad\qquad x-5+5=0+5$$
$$x-3 \qquad\qquad x=5$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{-3 \text{ et } 5}$

4.b. On constate en utilisant la question précédente que le **Programme B** correspond à l'expression littérale $(x+3)(x-5)$.

Le **Programme B** affiche 0 en prenant -3 ou 5 au départ.

5. Il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 3x &= 6x+3 \\ 3x-6x &= 6x+3-6x \\ -3x &= 3 \\ x &= \frac{3}{-3} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Vérifions :
En prenant -1 avec le **Programme A** on obtient successivement :
-1 — $-1+1=0$ — $3\times 0=0$ et $0-3=-3$.
En prenant -1 avec le **Programme C** on obtient successivement :
-1 — $7\times(-1)=-7$ — $-7+3=-4$ — $-4-(-1)=-4+1=-3$.

En prenant -1 au départ les **Programme A** et **Programme C** donnent le même résultat -3.

EXERCICE n° 4 — Le col de Hardknott

19 points

Théorème de Thalès — Théorème de Pythagore — Vitesse — Pourcentages

Un exercice assez difficile qui mélange théorème de Thalès, théorème de Pythagore, vitesse et notion de pente

1. Il suffit de calculer l'écart entre les altitudes.

$\boxed{\text{EC} = 393\,\text{m} - 251\,\text{m} = 142\,\text{m}}$

2.a. Les droites (BD) et (EC) sont perpendiculaires à la droite (AC).
On sait que **Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.**

Les droites (BD) et (EC) sont donc parallèles.

2.b.
Les droites (AE) et (AC) sont sécantes en A, les droites (BD) et (EC) sont parallèles,
D"après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{AB}}{\text{AC}} = \frac{\text{AD}}{\text{AE}} = \frac{\text{BD}}{\text{CE}}$$

$$\frac{\text{AB}}{\text{AC}} = \frac{51{,}25\,\text{m}}{\text{AE}} = \frac{11{,}25\,\text{m}}{142\,\text{m}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :

$\text{AE} = \dfrac{51{,}25\,\text{m} \times 142\,\text{m}}{11{,}25\,\text{m}}$ d'où $\text{AE} = \dfrac{7\,277{,}5\,\text{m}^2}{11{,}25\,\text{m}}$ et $\text{AE} \approx 647\,\text{m}$

$\boxed{\text{Finalement DE} = \text{AE} - \text{AD} = 647\,\text{m} - 51{,}25\,\text{m} \approx 596\,\text{m}}$

3. Aurélie roule à la vitesse moyenne de 8 km/h, la distance et le temps sont proportionnels :

Distance	$8\,\text{km} = 8\,000\,\text{m}$	$596\,\text{m}$
Temps	$1\,\text{h} = 60\,\text{min}$	$\dfrac{596\,\text{m} \times 60\,\text{min}}{8\,000\,\text{m}} \approx 4{,}47\,\text{min}$

$\boxed{\text{Aurélie arrivera à environ 9 h 59 min.}}$

4. Il faut d'abord calculer la distance horizontale AC.
Dans le triangle ACE rectangle en C,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\text{CA}^2 + \text{CE}^2 = \text{AE}^2$$
$$\text{CA}^2 + 142^2 = (51,25 + 596)^2$$
$$\text{CA}^2 + 142^2 = 647,25^2$$
$$\text{CA}^2 = 647,25^2 - 142^2$$
$$\text{CA}^2 \approx 398\,769$$
$$\text{CA} \approx \sqrt{398\,769}$$
$$\text{CA} \approx 631$$

La distance horizontale mesure environ 631 m.

$\boxed{\text{La pente est égale à } \dfrac{142\,\text{m}}{631\,\text{m}} \approx 0,225 \text{ soit environ } 22,5\ \%.}$

Exercice n° 5 — Les forfait de la station de ski *20 points*

Fonctions affines — Fonctions linéaires — Proportionnalité — Lecture graphique

Un exercice sur les fonctions affines, linéaires et constantes. Le fameux exercice avec les forfaits de ski ! Les professeurs de mathématiques sont des sportifs : après le vélo, le ski !

1.

Nombre de journées de ski	2	6	10
Formule A	73 €	219 €	365 €
Formule B	127 €	201 €	275 €
Formule C	448,50 €	448,50 €	448,50 €

2.a. Une situation de proportionnalité correspond à une fonction linéaire, c'est à dire une fonction dont la forme algébrique est du type $k(x) = ax$ où a est un nombre.

$\boxed{h(x) = 36,5x \text{ est une fonction linéaire de coefficient } 36,5 \text{ : elle correspond à une situation de proportionnalité.}}$

2.b. $\boxed{\text{La \textbf{Formule A} correspond à la fonction } h.}$

$\boxed{\text{La \textbf{Formule B} correspond à la fonction } f.}$

$\boxed{\text{La \textbf{Formule C} correspond à la fonction } g.}$

2.c. Il faut résoudre l'équation :

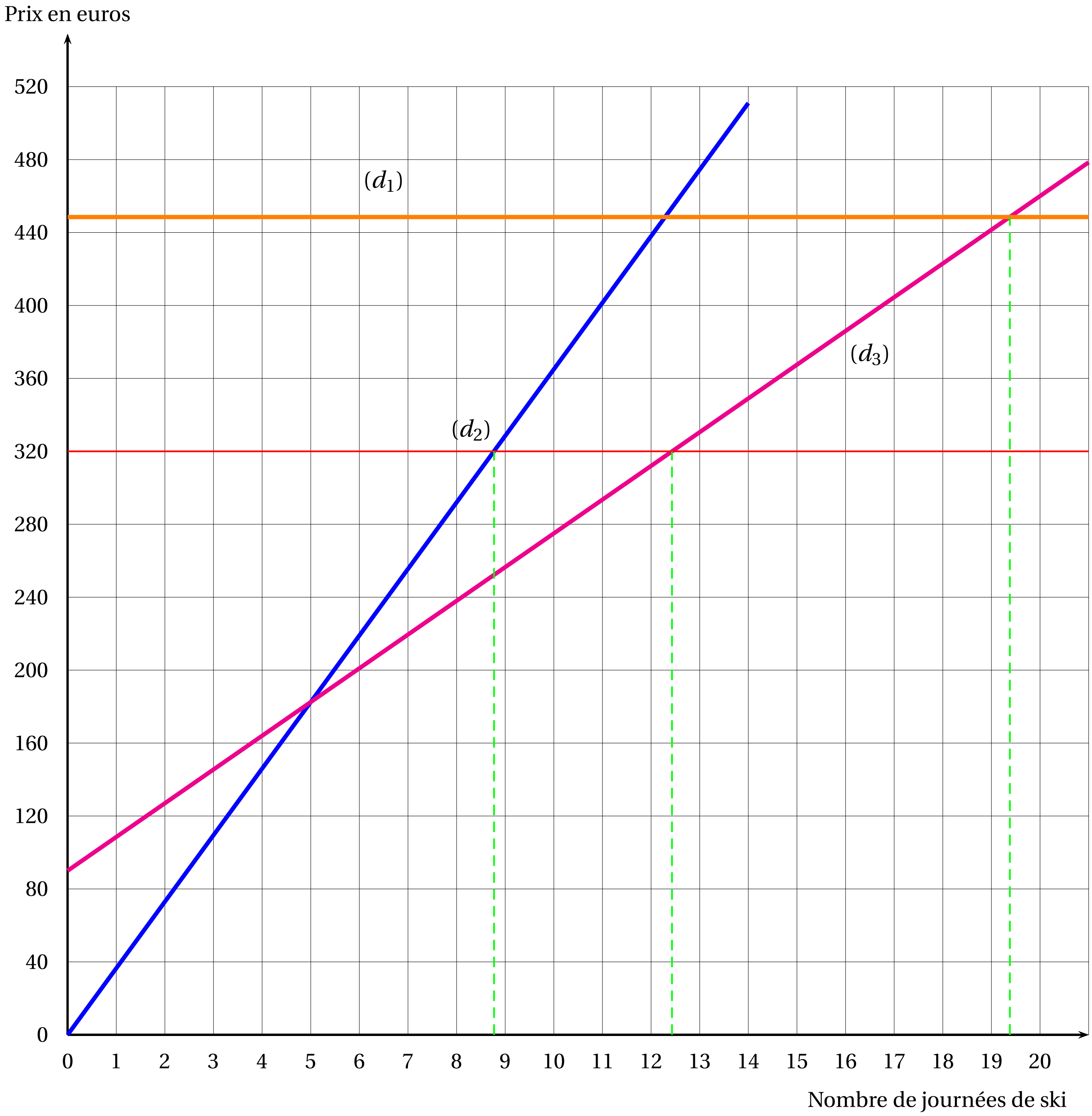
$$\begin{aligned}
h(x) &= f(x)\\
36,5x &= 90 + 18,5x\\
36,5x - 18,5x &= 90 + 18,5x - 18,5x\\
18x &= 90\\
x &= \frac{90}{18}\\
x &= 5
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour 5 journées de ski les \textbf{Formule A} et \textbf{Formule B} correspondent au même prix.}}$

3.a. On sait que la fonction h est linéaire : sa représentation graphique est une droite passant par l'origine. Il s'agit de la droite (d_2).

On sait que la fonction g est constante : sa représentation graphique est une droite horizontale. Il s'agit de la droite (d_1).

On sait que la fonction f est affine : sa représentation graphique est une droite passant par $(0;90)$. Il s'agit de la droite (d_3).



3.b. Avec 320 € il peut skier au maximum 12 jours avec la **Formule B**

3.c. À partir de 20 jours de ski la **Formule C** est la plus rentable.