Baccalauréat S

Session 2017

Épreuve : **Mathématiques**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

PROPOSITION DE CORRIGÉ

1 Exercice 1

Partie A

1) Lorsque $x \to +\infty$, la fonction présente une forme indéterminée. En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, on est donc dans le cas « $0 \times \infty$ ». Mais l'indétermination est levée par un simple changement d'écriture : pour tout réel x, on a $h(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$, or on on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc, par passage à l'inverse, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$: c'est ce qu'on appelle les « croissances comparées ».

2) On dérive : $h'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

On peut ensuite écrire que pour tout réel x on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de $(1-x)$.

On a ainsi le tableau de variations de la fonction h :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$		$\searrow$	

3) a) Partons du résultat proposé :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-x} - h'(x) &= \mathrm{e}^{\cancel{-x}} - \left(\mathrm{e}^{\cancel{-x}} - x\,\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= x\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= h(x). \end{aligned}$$

3) b) Décomposons :

• une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$;

3) c)

• une primitive de $x \mapsto h'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto h(x)$;

par conséquent, une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} - h'(x) = h(x)$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$x \mapsto -\mathrm{e}^{-x} - h(x),$$

c'est-à-dire la fonction H définie par $H(x) = -\mathrm{e}^{-x} - h(x) = -\mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x}$, soit encore :

$$\boxed{H(x) = (-1-x)\,\mathrm{e}^{-x}}.$$

Partie B

1) a) La distance MN, appelons-là $d(x)$, est égale à $d(x) = |f(x) - g(x)|$, vu que les deux points M et N ont la même abscisse (c'est un cas particulier de la formule $\sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$ dans le cas où $x_N = x_M$).

Cette distance vaut donc $d(x) = |x\,\mathrm{e}^{-x} + \ln(1+x) - \ln(1+x)| = |x\,\mathrm{e}^{-x}| = x\,\mathrm{e}^{-x}$ puisque dans l'intervalle proposé, à savoir $[0; +\infty[$, les deux facteurs x et e^{-x} sont toujours positifs donc la quantité $h(x)$ aussi.

Pour connaître la valeur maximale de cette distance, il suffit par conséquent de connaître le maximum de la fonction h. Il est atteint pour $x = 1$ d'après la question 2 de la partie A.

Le maximum de la quantité $d(x)$ sur $[0; +\infty[$ est donc égal à $h(1) = 1 \times \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

1) b) Voici le graphique :

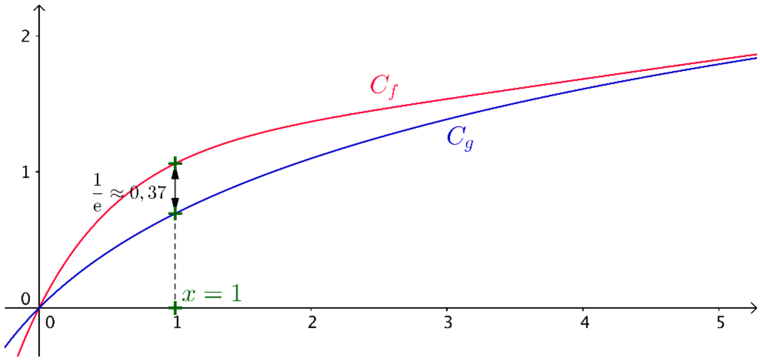

Figure 1. Écart maximal entre C_f et C_g sur $[0;+\infty[$.

2) a) Voici le graphique :

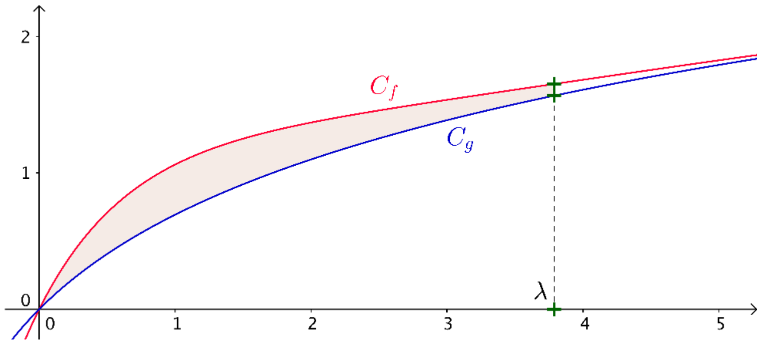

Figure 2. Domaine D_λ

2) b) C'est un calcul d'intégrale :

$$\begin{aligned}
A_\lambda &= \int_0^\lambda (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \text{ on précise que ceci est valide car } f \geqslant g \text{ sur } [0;+\infty[\,; \\
&= \int_0^\lambda x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\lambda h(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [H(x)]_0^\lambda \\
&= H(\lambda) - H(0) \\
&= (-1-\lambda)\,\mathrm{e}^{-\lambda} - (-1-0)\,\mathrm{e}^{-0} \\
&= (-1-\lambda)\,\mathrm{e}^{-\lambda} + 1 \\
&= 1 - (1+\lambda)\,\mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= 1 - \frac{1+\lambda}{\mathrm{e}^\lambda}.
\end{aligned}$$

2) c) Lorsque $\lambda \to +\infty$, alors $\mathrm{e}^\lambda \to +\infty$, et $1+\lambda \to +\infty$, la limite de $\frac{1+\lambda}{\mathrm{e}^\lambda}$ présente donc une forme indéterminée. Décomposons simplement :

$$A_\lambda = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^\lambda} - \frac{\lambda}{\mathrm{e}^\lambda}.$$

Le terme $-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}}$ a pour limite 0 lorsque $\lambda \to +\infty$. Quant au terme $\dfrac{\lambda}{\mathrm{e}^{\lambda}}$, nous avons démontré dans la toute première question de ce sujet qu'il avait pour limite 0 lorsque $\lambda \to +\infty$. Ainsi, par soustraction :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_{\lambda} = 1.$$

L'interprétation qu'on peut faire de ce résultat, c'est que l'aire entre les deux courbes C_f et C_g, bien que correspondant à un domaine infini en largeur, est néammoins finie en mesure, et cette aire vaut 1. L'illustration n'était pas demandée mais la voici pour bien visualiser :

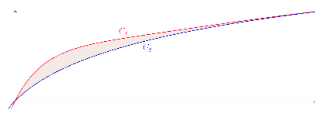

Figure 3.

3) a) L'algorithme affiche $\lambda = 3$.

3) b) Cet algorithme calcule la première valeur entière de λ telle que l'aire de D_{λ} dépasse un S donné. Ici, cet algorithme a affiché $\lambda = 3$ parce que :

$$A_{\lambda=2} = 0,5940$$
$$A_{\lambda=3} = 0,8009.$$

2 Exercice 2

1) On remplace dans l'équation de P par les coordonnées de A :

$2x_A - z_A - 3 = 2 \times 1 - a^2 - 3 = -1 - a^2$ or nous savons que quelle que soit la valeur réelle de a, nous aurons toujours $a^2 \geqslant 0$ (un carré étant toujours positif) donc $a^2 + 1 > 0$ donc $-a^2 - 1 < 0$. La quantité $-1 - a^2$ n'est donc jamais nulle et donc :

$$\forall a \in \mathbb{R}, A \notin P.$$

2) a) Donnons un vecteur normal de P :

$$\vec{n}(2; 0; -1).$$

Nous en déduisons un système d'équations paramétriques de la droite D :

$$D\colon \begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= a \\ z &= a^2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Attention, t est une variable muette, c'est la variable qui paramètre la droite, tandis que a est une constante qui ne dépend que du point A.

2) b) On applique la formule de Pythagore :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} \\ &= \sqrt{(2t)^2 + (-t)^2} \\ &= \sqrt{5t^5} \\ &= \sqrt{5} \times |t|. \end{aligned}$$

Remarque : on pouvait aller plus vite et dire que puisque $M \in D$ avec le paramètre t, alors $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{n}$ donc $AM = |t| \times \|\vec{n}\| = |t| \times \sqrt{5}$.

3) Ce sujet comporte des questions demandant décidément des prises d'initiative !

Nous devons d'abord déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de D et de P.

H, étant sur D, s'écrit $H\begin{pmatrix} x & = & 1+2t \\ y & = & a \\ z & = & a^2-t \end{pmatrix}$ pour une certaine valeur de t.

Mais, H étant sur P aussi, ses coordonnées vérifient l'équation de P: $2x - z - 3 = 0$.

Cela va nous permettre de déterminer la valeur de t correspondant à H :

$$\begin{aligned} 2x_H - z_H - 3 = 0 &\Leftrightarrow 2(1+2t) - (a^2 - t) - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 + 4t - a^2 + t - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5t = 1 + a^2 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{1+a^2}{5}. \end{aligned}$$

Maintenant, déterminons AH en utilisant la formule établie au 2)b) :

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{5} \times \frac{1+a^2}{5} \\ &= \frac{1+a^2}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Cette distance, oui, est minimale pour une certaine valeur de a, en l'occurence pour $a = 0$. Elle vaut alors, ce qui n'était pas demandé :

$$AH = d(A, P) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

3 Exercice 3

Attention, les zones centrales sont numérotées 1 et les zones périphériques sont numérotées 5.

Partie A

1) C'est la proposition C :

Proposition C
$40 < r < 60$ et $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$

2) a) Pour $z = 70\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$, on a $60 < |z| < 80$ et $-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < -\frac{\pi}{4}$ donc c'est la zone **G4**.

2) b) Pour $z = -45\sqrt{3} + 45\mathrm{i}$, nous devons d'abord trouver le module :

- $|z| = 45 \times \left|-\sqrt{3} + \mathrm{i}\right| = 45 \times \sqrt{3+1} = 90$;
- $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}.$

Ainsi, c'est la zone **D5**.

Partie B

1) $p(M<0)=0$ d'après la calculatrice. En effet, on est très loin de la valeur moyenne qui est 50. Cela signifie dans notre exercice que la variable M ne prend que des valeurs positives, et cela a du sens pour nous, vu que M est censée représenter un module.

2) $p(40<M<60)=p(\mu-2\sigma<M<\mu+2\sigma)=0,9545$ d'après le cours : pas besoin de calculatrice ici.

3) On nous demande $p\Big((40<M<60)\cap\Big(\frac{\pi}{4}<T<\frac{\pi}{2}\Big)\Big)$. D'après les hypothèses de l'énoncé, ceci est égal à $p((40<M<60))\times p\Big(\frac{\pi}{4}<T<\frac{\pi}{2}\Big)=0,9545\times 0,819\approx 0,782$.

La probabilité que ce soit bien **B3** est donc 78,2% environ.

4 Exercice 4 (obli)

Partie A

1) Arbre des deux premières semaines en partant d'un individu S :

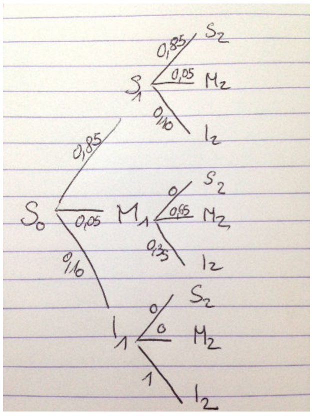

Figure 4.

2) On a :

$$\begin{aligned}
p(I_2) &= p(S_1\cap I_2)+p(M_1\cap I_2)+p(I_1\cap I_2)\\
&= 0,85\times 0,10+0,05\times 0,35+0,10\times 1\\
&= 0,085+0,0175+0,10\\
&= 0,2025.
\end{aligned}$$

3) On demande :

$$\begin{aligned}
p_{I_2}(M_1) &= \frac{p(M_1\cap I_2)}{p(I_2)}\\
&= \frac{0,0175}{0,2025}\\
&\approx 0,086.
\end{aligned}$$

Partie B

1) Pour une semaine donnée, tout individu est d'après l'énoncé, soit susceptible d'être atteint, soit malade, soit immunisé, ainsi $p(S_n)+p(M_n)+p(I_n)=1$.

2) a)

On remarque que le tableur nous permet de vérifier notre résultat $p(I_2)=0,2025$ *trouvé question 2 partie A.*

En C3 on écrira :

```
=0.65*C2+0.05*B2
```

2) b) Cette question teste la capacité du candidat à bien lire une feuille de calcul.

Le pic est atteint d'après le tableur pour la ligne 6, soit $N=4$ avec une valeur 0,0859. La probabilité d'être malade cette semaine-là est donc 8,59%.

3) a) Un individu susceptible d'être atteint en semaine $n+1$ était forcément aussi susceptible d'être atteint en semaine n car s'il était malade, une semaine après il est soit encore malade soit guéri donc immunisé, et s'il était immunisé il le reste.

Ainsi, $u_{n+1}=p(S_{n+1})=p(S_n)\times p_{S_n}(S_{n+1})=u_n\times 0,85$.

La suite (u_n) est donc géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison $q=0,85$ d'où son terme général :

$$u_n=0,85^n.$$

3) b) Raisonnons par récurrence :

- $v_0=0$ puisqu'on part d'une population où le virus n'a pas encore sévi. D'autre part, $0,85^0-0,65^0$ est aussi égal à $1-1=0$ et donc la formule est vraie au rang $n=0$.

- Partons de cette hypothèse de récurrence :

$$v_n=\frac{1}{4}(0,85^n-0,65^n),$$

  et de cette relation de récurrence :

$$v_{n+1}=0,65\,v_n+0,05\,u_n,$$

  et « mélangeons » les deux, cela nous donne :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 0,65\,v_n+0,05\,u_n\\
&= 0,65\times\frac{1}{4}(0,85^n-0,65^n)+0,05\times 0,85^n\\
&= 0,1625\times 0,85^n-0,65\times\frac{1}{4}\times 0,65^n+0,05\times 0,85^n\\
&= 0,2125\times 0,85^n-0,65\times\frac{1}{4}\times 0,65^n\\
&= 0,2125\times 0,85^n-\frac{1}{4}\times 0,65^{n+1},
\end{aligned}$$

  et nous, nous voudrions montrer que :

$$v_{n+1}=\frac{1}{4}(0,85^{n+1}-0,65^{n+1}).$$

Il nous suffit alors de vérifier que :

$$0,2125 = 0,85 \times \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0,2125 = 0,2125,$$

c'est bon, nous avons montré la formule par récurrence.

4) Lorsque $n \to +\infty$, les quantités $0,85^n$ et $0,65^n$ tendent vers 0 car 0,65 et 0,85 sont deux réels de l'intervalle $]0;1[$, et ainsi $\lim(u_n) = \lim(v_n) = 0$.

Puisque pour tout n nous avons $u_n + v_n + w_n = 1$, nous en déduisons que $\lim(w_n) = 1$: à la fin, tout le monde a été malade, puis a guéri, et s'est donc immunisé.