Correction

Pondichéry - Mai 2018 - Mathématiques

Ce document est une correction commentée du sujet de brevet. Les commentaires ne font pas partie de la rédaction demandée lors de l'épreuve. Pour certains exercices plusieurs solutions sont proposées. Au brevet une seule solution est demandée et parfois même sans justification quand c'est précisé dans le sujet !

Exercice 1 : la roue à 13 cases

Connaissances :
— Probabilité, expérience aléatoire à une épreuve

1. Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.
Il y a **13 cases** numérotées de 0 à 12 (et oui cela fait 13 !... on ne compte bien que depuis 1).
Il n'y a bien sûr qu'une seule case numérotées 8.

$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir un 8 est } \frac{1}{13} \approx 0,077 \approx 7,7\%}$

2. Entre 0 et 12 il y a 6 nombres impairs : 1, 3, 5, 7, 9, et 11.

$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir un nombre impair est } \frac{6}{13} \approx 0,462 \approx 46,2\%}$

3. Entre 0 et 13 il y a 6 nombres premiers : 2, 3, 5, 7 et 11 (attention 1 n'est pas premier).

$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir un nombre premier est } \frac{5}{13} \approx 0,385 \approx 38,5\%}$

4. La probabilité d'obtenir une case parmi 13 est $\frac{1}{13}$. Le hasard n'a pas de mémoire, le fait d'obtenir 9 plusieurs fois de suite n'a pas d'influence sur les tirages suivants.

$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir 7 ou 9 est donc la même : 1 chance sur 13}}$

Exercice 2 : le pavage pied de coq

Connaissances :
— Translation
— Aire
— Agrandissement/réduction

1. $\boxed{\text{C'est une translation.}}$

2. Chaque carré du quadrillage mesure 1 cm de côté et a donc une aire de 1 cm^2.
Il faut compter le nombre de carré contenu dans la figure.
Il y a 4 carrés complets et 8 demi-carrés soit 4 carrés complets.

$\boxed{\text{Le motif a une aire de 8 } cm^2}$

3. On sait que si on divise les longueurs d'une figure par 2 alors les aires sont divisées par $2^2 = 4$
On peut ici constater que si un carré de 1 cm a son côté divisé par 2, alors il mesure $0,5$ cm et son aire $0,5\ cm \times 0,5\ cm = 0,25\ cm^2$.
Ce qui confirme le résultat vu en classe exprimé précédemment !

$\boxed{\text{Marie à donc tort !}}$

Exercice 3 : QCM

Connaissances :
— Écriture scientifique
— Latitude
— Fractions

Aucune justification n'est demandée dans l'énoncé. Nous allons néanmoins donner les détails des calculs !

1. $2,53 \times 10^{15} = 2,53 \times 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 2\ 530\ 000\ 000\ 000\ 000$

$\boxed{\text{1.b}}$

2. $\boxed{\text{La latitude de l'équateur est } 0^o \text{ donc 2.a}}$

3. $\frac{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}{7} = \frac{\frac{4}{6}+\frac{5}{6}}{7} = \frac{\frac{9}{6}}{7} = \frac{9}{6} \times \frac{1}{7} = \frac{9}{42} = \frac{3}{14}$

$\boxed{\text{3.a}}$

Exercice 4 : Deux programmes de calcul et un tableur

Connaissances :
- — programme de calcul,
- — tableur,
- — développement,
- — équation.

1. Dans le programme A en partant de 1 on obtient successivement :
$1-3=-2$ puis $(-2)^2=4$

$\boxed{\text{On obtient bien 4}}$

2. Dans le programme B en partant de -5 on obtient successivement :
$(-5)^2 = 25$ puis $25+3\times(-5) = 25-15 = 10$ et enfin $10+7=17$

$\boxed{\text{On obtient 17}}$

3. $\boxed{=B1^2+3*B1+7}$

4.a En prenant x comme nombre de départ dans le programme A on obtient successivement :
$x-3$ puis $(x-3)^2$

$(x-3)^2 = (x-3)(x-3) = x^2-3x-3x+9 = x^2-6x+9$

$\boxed{\text{On obtient donc } x^2-6x+9}$

Bien que les identités remarquables ne soient plus au programme du cycle 4 on pouvait les utiliser dans ce cas !

4.b En prenant x comme nombre de départ dans le programme B on obtient successivement :
x^2 puis x^2+3x et enfin x^2+3x+7

$\boxed{\text{On obtient donc } x^2+3x+7}$

4.c En observant le tableur on ne voit pas un tel nombre !
On peut faire des essais supplémentaires, mais la méthode la plus experte consiste à résoudre l'équation suivante où x désigne le nombre de départ (on utilise les expressions des questions **4.a** et **4.b**).

$$x^2-6x+9 = x^2+3x+7$$

Le terme en x^2 est commun au deux membres de l'équation, on peut donc l'enlever.

$$-6x+9 = 3x+7$$
$$-6x-3x = 7-9$$
$$-9x = -2$$
$$x = \frac{-2}{-9}$$
$$x = \frac{2}{9}$$

Le nombre $\frac{2}{9}$ est le seul qui permet d'obtenir le même résultat avec les programmes A et B.

Exercice 5 : Les flèchettes

Connaissances :
- coordonnées,
- théorème de Pythagore,
- cercle et rayon,
- Scratch.

Cet exercice est assez difficile, il utilise sans le dire et même en le démontrant dans un cas particulier, la distance euclidienne dans le plan dont la connaissance relève du programme de seconde !

1. Dans le triangle OHF rectangle en H nous avons $OH = 72$ et $HF = 54$.
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$HO^2 + HF^2 = OF^2$$
$$72^2 + 54^2 = OF^2$$
$$OF^2 = 5\ 184 + 2\ 916$$
$$OF^2 = 8\ 100$$
$$OF = \sqrt{8\ 100}$$
$$OF = 90$$

Donc la distance entre la flèche et le centre du repère est 90

2. OF ne peut pas dépasser le rayon du cercle.

OF doit être inférieure à 100.

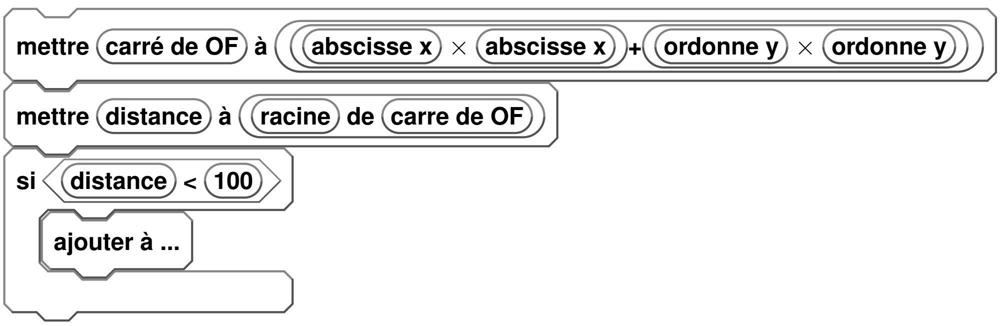
3.a Il est écrit :

L'expérience est donc répétée 120 fois.

3.b La variable **score** permet de compter le nombre de flèche dans la cible sur les 120 expériences.

3.c *Cette question est difficile même si on peut y répondre par imitation.*

Dans la question **1.** nous avons calculé la distance OF en partant d'un point de coordonnée $(72; 54)$
Nous avons obtenu : $OF^2 = 72^2 + 54^2$ c'est à dire $OF^2 = abscisse \times abscisse + ordonne \times ordonne$
Puis nous avons calculé la racine carrée de OF^2.
Enfin à la question **2.** nous avons prouvé que la distance de la fléchette au centre doit être inférieure à 100
D'où la réponse suivante :



3.d Si score=102 cela signifie que sur 120 lancers, 102 sont arrivés dans la cible.

$\boxed{\text{La fréquence cherchée est } \frac{102}{120} = \frac{51}{60} = \frac{17}{20} \text{ soit } 0,85 = 85\%}$

4. Il faut calculer l'aire du carré et l'aire du disque. L'aire d'un carré s'obtient en multipliant la longueur du côté par lui-même. L'aire d'un disque de rayon r s'obtient en calculant $\pi \times r^2$

Aire du carré : $200^2 = 40\ 000$
Aire du disque : $\pi \times 100^2 = 10\ 000\pi \approx 31416$

La probabilité cherchée est donc la fréquence : $\frac{31\ 416}{40\ 000} = 0,7854$

$\boxed{\text{Au centième prés la probabilité cherchée vaut } 0,79}$

C'est relativement proche de l'expérience menée avec Scratch !

Exercice 6 : la fréquence cardiaque

Connaissances :
- lecture graphique ;
- heures ;
- vitesse ;
- pourcentages.

1. $\boxed{\text{La fréquence cardiaque au départ est environ 52 battements par minute}}$

2. $\boxed{\text{Le maximum est environ 160 battements par minute}}$

3. Il part à 9 h 33 et arrive à 10 h 26. Il y a 27 min jusque 10 h puis 26 min de plus.

$\boxed{\text{Il a couru 53 } min}$

4. Il a parcouru 11 km en 53 min. On peut utiliser un tableau de proportionnalité ou l'expression $v = \frac{d}{t}$

Comme 1 $h = 60$ min on peut écrire le tableau de proportionnalité suivant :

Distance	11 km	$\dfrac{60\ min \times 11\ km}{53\ min} \approx 12,5\ km$
Temps	53 min	$1\ h = 60\ min$

En utilisant l'expression $v = \frac{d}{t}$ on obtient $\frac{11\ km}{53\ min} \approx 0,207\ km/min$
Comme 1 $h = 60$ min reste à calculer $0,207\ km \times 60 \approx 12,4\ km$
Ce calcul est très sensible aux arrondis !

$\boxed{\text{Sa vitesse moyenne est bien } 12,5\ km/h}$

5. Un effort soutenu correspond à une fréquence cardiaque comprise entre 70% et 85% de la fréquence cardiaque maximale.
$190 \times \frac{70}{100} = 133$ et $190 \times \frac{85}{100} = 161,5$

Par lecture graphique on voit qu'il dépasse les 130 battements entre la cinquième et la dixième minute et qu'il repasse en dessous des 130 entre la quarantième et quarante-cinquième minute. La fréquence cardiaque ne dépasse jamais les 161,5.
Plus précisement on peut dire qu'il dépasse les 133 à partir de 8 min et passe en dessous à partir de 41 min

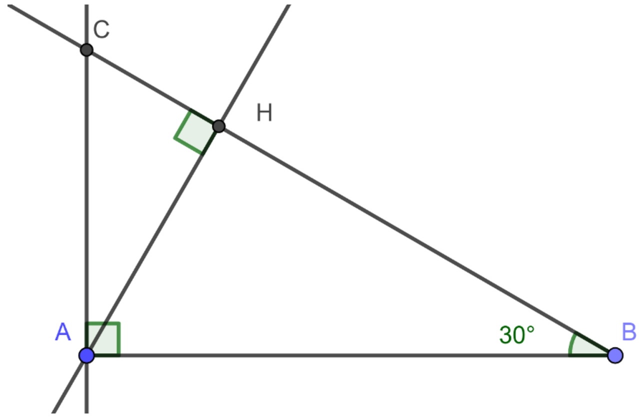
$\boxed{\text{Il a fourni un effort soutenu pendant environ 33 } min.}$

Exercice 7 : les triangles rectangles semblables

Connaissances :
- tracé géométrique ;
- trigonométrie ;

— triangles semblables ;
— coefficient d'agrandissement réduction.

1. Pour construire cette figure, on commence par tracer le segment $[AB]$, puis la demi-droite d'origine B constituant un angle de 30^o avec la demi-droite $[BA)$. On trace la perpendiculaire à (AB) passant par A, elle coupe la demi-droite précédente en C. Reste à tracer la perpendiculaire à (BC) passant par A, elle coupe (BC) en H.



2. C'est un raisonnement de trigonométrie.
Dans le triangle AHB rectangle en H
On connaît l'hypoténuse du triangle qui mesure 7 cm et on cherche le côté opposé à l'angle à 30^o.
On va donc utiliser le sinus de l'angle à 30^o.
$sin\ 30^o = \frac{AH}{7\ cm}$ d'où $AH = 7\ cm \times sin 30^o = 3,5\ cm$

$\boxed{AH = 3,5\ cm}$

3. Pour démontrer que les deux triangles sont semblables nous allons prouver que leurs trois angles sont égaux.
Dans le triangle ABC rectangle en A les angles aigus $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CBA}$ sont complémentaires.
Ainsi $\widehat{ACB} = 90^o - 30^o = 60^o$

Le triangle ABC est constitué de trois angles mesurant respectivement 90^o, 60^o et 30^o.

Dans le triangle AHC rectangle en H les angles aigus $\widehat{ACH}$ et $\widehat{HAC}$ sont complémentaires.
Ainsi comme $\widehat{ACH} = \widehat{ACB} = 60^o$ on a $\widehat{HAC} = 90^o - 60^o = 30^o$

Le triangle AHC est constitué de trois angles mesurant respectivement 90^o, 60^o et 30^o.

$\boxed{\text{Les triangles } ABC \text{ et } AHC \text{ ont les mêmes angles : ils sont semblables !}}$

4. Il faut observer les angles à 30^o dans chacun des deux triangles.
Dans ABC l'angle à 30^o est composé du côté de l'angle droit $AB = 7\ cm$ et de l'hypoténuse BC.
Dans AHC l'angle à 30^o est l'angle $\widehat{HAC}$ constitué du côté de l'angle droit $AH = 3,5\ cm$ et de l'hypoténuse AC.

Le coefficient de réduction cherché permet de donc de passer de la longueur AB à la longueur AH.
Il s'agit du nombre k vérifiant :

$$7\ cm \times k = 3,5\ cm$$

$$k = \frac{3,5\ cm}{7\ cm} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$\boxed{\text{Le coefficient de réduction est } 0,5. \text{ Il est inférieur à 1, c'est bien une réduction !}}$