Math93.com

Baccalauréat 2017 - S Polynésie

Série S Obli. et Spé.
14 Juin 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. — 6 points

Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C sont indépendantes. Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

Partie A - Durée d'attente

1. *Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client Internet lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. Une étude permet de modéliser cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire* D_1 *qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,6.*

1. a. Quelle est la durée d'attente moyenne que peut espérer un client Internet qui appelle cette ligne d'assistance ?

> **Définition 1**
>
> Soit λ un réel strictement positif. Une variable aléatoire à densité T suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
>
> $$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$$
>
> En outre la variable T est d'espérance : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Puisque D_1 qui modélise cette durée d'attente en minutes suit la loi exponentielle de paramètre $0,6$, la durée d'attente moyenne que peut espérer un client est donnée par l'espérance de la variable aléatoire soit :

$$E(D_1) = \frac{1}{0,6} \approx \underline{1,667\,\text{min}}$$

1. b. Calculer la probabilité que la durée d'attente d'un client Internet choisi au hasard soit inférieure à 5 minutes.

> **Propriété 1**
>
> Soit λ un réel strictement positif. Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel a et b tels que $0 \leq a \leq b$:
>
> $$P(a \leq T \leq b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$
>
> et donc
>
> $$P(T \leq b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P(T \geq a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

La probabilité que la durée d'attente d'un client Internet choisi au hasard soit inférieure à 5 minutes est donnée par :

$$p(D_1 < 5) = 1 - \mathrm{e}^{-0,6\times 5} = 1 - \mathrm{e}^{-3} \approx \underline{0,950}$$

2. *Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client mobile lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. On modélise cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_2 qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, λ étant un réel strictement positif.*

2. a. Sachant que $P(D_2 \leq 4) = 0,798$, déterminer la valeur de λ.

La variable D_2 suit une loi exponentielle de paramètre λ donc :

$$\begin{aligned} P(D_2 \leq 4) = 0,798 &\iff 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\times 4} = 0,798 \\ &\iff \mathrm{e}^{-4\lambda} = 1 - 0,798 = 0,202 \end{aligned}$$

On compose par la fonction ln qui est définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} &\iff -4\lambda = \ln 0,202 \\ &\iff \lambda = \frac{\ln 0,202}{-4} \approx \underline{0,4} \end{aligned}$$

2. b. En prenant $\lambda = 0,4$, peut-on considérer que moins de 10% des clients mobile choisis au hasard attendent plus de 5 minutes avant de joindre un opérateur ?

On a en considérant que la variable D_2 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,4$:

$$p\left(D_2 \geq 5\right) = \mathrm{e}^{-0,4\times 5} = \mathrm{e}^{-2} \approx \underline{0,135 > 10\%}$$

Donc on ne peut pas considérer que moins de 10% des clients mobile choisis au hasard attendent plus de 5 minutes avant de joindre un opérateur

Partie B - Obtention d'un opérateur

Si la durée d'attente avant l'obtention d'un opérateur dépasse 5 minutes, l'appel prend automatiquement fin. Sinon, l'appelant obtient un opérateur. On choisit au hasard un client qui appelle la ligne d'assistance. On admet que la probabilité que l'appel émane d'un client Internet est 0,7. De plus, d'après la partie A, on prend les données suivantes : Si l'appel provient d'un client Internet alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,95. Si l'appel provient d'un client mobile alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,87.

2. a. Déterminer la probabilité que le client joigne un opérateur.

Notons les évènements :

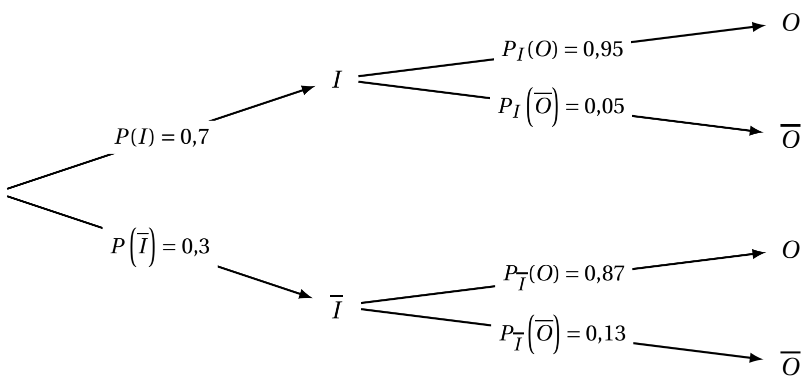
- I : « *l'appel émane d'un client Internet* » et $\overline{I}$ « *l'appel émane d'un client mobile* ». On a d'après les données :

$$p(I) = 0,7 \text{ et } p\left(\overline{I}\right) = 0,3$$

- O : « *le client obtient un opérateur* ». On a d'après les données :

$$\begin{cases} p_I(O) = 0,95 \text{ et } p_I\left(\overline{O}\right) = 0,05 \\ p_{\overline{I}}(O) = 0,87 \text{ et } p_{\overline{I}}\left(\overline{O}\right) = 0,13 \end{cases}$$

On peut résumer les données dans un arbre :



 ©ISSN 2272-5318

La probabilité que le client joigne un opérateur est avec ces notations $p(O)$.
Les évènements I et $\overline{I}$ formant une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(O) = P(O \cap I) + P\left(O \cap \overline{I}\right)$$
$$P(O) = P(I) \times P_I(O) + P\left(\overline{I}\right) \times P_{\overline{I}}(O)$$
$$P(O) = 0{,}7 \times 0{,}95 + 0{,}3 \times 0{,}87$$
$$P(O) = 0{,}665 + 0{,}261$$
$$P(O) = 0{,}926$$

La probabilité que le client joigne un opérateur est 0,926.

2. b. Un client se plaint que son appel a pris fin après 5 minutes d'attente sans avoir obtenu d'opérateur. Est-il plus probable que ce soit un client Internet ou un client mobile ?

Un client se plaint que son appel a pris fin après 5 minutes d'attente sans avoir obtenu d'opérateur. Donc la probabilité qu'il soit client internet est $p_{\overline{O}}(I)$, et client mobile $p_{\overline{O}}\left(\overline{I}\right)$. On a d'après la question précédente (B.1)

$$p\left(\overline{O}\right) = 1 - p(O) = 0,074$$

et de ce fait :

- d'une part (client Internet) :
$$p_{\overline{O}}(I) = \frac{p\left(\overline{O} \cap I\right)}{p\left(\overline{O}\right)} = \frac{0,7 \times 0,05}{0,074} \approx \underline{0,473}$$

- d'autre part (client mobile) :
$$p_{\overline{O}}\left(\overline{I}\right) = \frac{p\left(\overline{O} \cap \overline{I}\right)}{p\left(\overline{O}\right)} = \frac{0,3 \times 0,13}{0,074} \approx \underline{0,527} > p_{\overline{O}}(I)$$

Conclusion : si un client se plaint que son appel a pris fin après 5 minutes d'attente sans avoir obtenu d'opérateur, il est plus probable que ce soit un client mobile.

Partie C - Enquête de satisfaction

La société annonce un taux de satisfaction de 85% pour ses clients ayant appelé et obtenu un opérateur. Une association de consommateurs souhaite vérifier ce taux et interroge 1 303 personnes. Parmi celles-ci, 1 150 se disent satisfaites. Que pensez-vous du taux de satisfaction annoncé par la société?

- **Analyse des données** :
  - « Sur un échantillon de $n = 1303$ clients. Il est constaté que 1150 d'entre eux sont satisfaits. ». Donc la fréquence observée clients satisfaits est

$$f = 1150 \div 1303 \approx 0{,}882578664 \quad \text{soit} \quad \underline{f \approx 0{,}883}$$

  - On veut tester l'hypothèse : « la proportion de clients satisfaits est $\underline{p = 85\%}$ ».

- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 1303$, $p = 85$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 1303 \geq 30 \\ \checkmark & np = 1303 \times 0{,}85 = 1107{,}55 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 1303 \times 0{,}15 = 195{,}45 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0{,}85 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}85 \times 0{,}15}}{\sqrt{1303}} \ ; \ 0{,}85 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}85 \times 0{,}15}}{\sqrt{1303}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}83061$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}83}$.
- $p + 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}86939$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}87}$.

$$\boxed{I_{1303} \approx [0{,}83 \ ; \ 0{,}87]}$$

- **Conclusion**

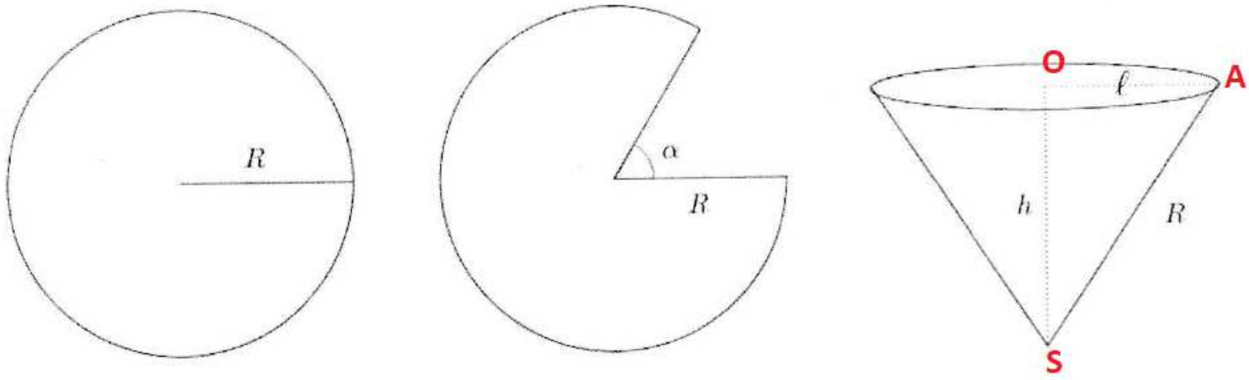
La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle, $f \approx 0{,}883 \notin I$ donc le résultat du contrôle remet en question l'hypothèse, au seuil de 95%.

Le taux annoncé semble cependant (au risque 5%) être inférieur au taux réel, la société aurait sous-évalué le taux de satisfaction.

 ©ISSN 2272-5318

Exercice 2. 5 points

Commun à tous les candidats



Dans un disque en carton de rayon R, on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle a pour obtenir un cône de volume maximal.

1. On choisit $R = 20$ cm.

1. a. Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h, est $V(h) = \frac{1}{3}\pi\left(400 - h^2\right)h$.

Le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire $\mathscr{A}$ et de hauteur h est $\frac{1}{3}\mathscr{A}\ h$.

- Exprimons ℓ en fonction de h.
  On se place dans le triangle SOA rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$SA^2 = SO^2 + OA^2 \iff R^2 = h^2 + \ell^2 \iff \ell^2 = 20^2 - h^2$$

- Aire du disque de base.
  Donc l'aire $\mathscr{A}$ du disque de base est :

$$\mathscr{A} = \pi\ \ell^2 = \pi\left(400 - h^2\right)$$

- Volume du cône.
  On obtient donc :

$$V(h) = \frac{1}{3}\mathscr{A}\ h \Longrightarrow \boxed{V(h) = \frac{1}{3}\pi\left(400 - h^2\right)h}$$

1. b. Justifier qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum. Donner cette valeur.

La fonction V est une fonction polynôme du troisième degré en h, définie sur $]0\,;20[$ car h est positif et inférieur strictement au rayon $R = 20$ cm.

$$V : \begin{cases}]0\,;20[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & V(h) = \frac{1}{3}\pi\left(400h - h^3\right) \end{cases}$$

La fonction V est dérivable sur $]0\,;20[$ et pour tout h de $]0\,;20[$ on a :

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi\left(400 - 3h^2\right)$$

Les racines de la fonction dérivée V' sont :

$$\begin{cases} h_1 = \frac{20\sqrt{3}}{3} \in]0\,;20[\\ h_2 = -\frac{20\sqrt{3}}{3} \notin]0\,;20[\end{cases}$$

Donc sur $]0\,;20[$, V' est du signe du coefficient de h^2 donc négatif après h_1 et positif avant. On obtient :

h	0	$\frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11.5$	20
Signe de $V'(h)$	$+$	0	$-$
Variations de V	0 ↗	$V\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right) \approx 3\,224{,}53$	↘ 0

Donc il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum et cette valeur est

$$h_1 = \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx \underline{11.5}$$

1. c. Comment découper le disque en carton pour avoir un volume maximum ? Donner un arrondi de α au degré près.

- Calcul de ℓ.
  On a vu lors de la question (1a.) que : $\ell = \sqrt{400 - h^2}$ donc le rayon du disque de base correspondant au volume maximal est :

$$\begin{aligned}\ell_1 = \sqrt{400 - h_1^2} &= \sqrt{400 - \left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{400 - \frac{400}{3}} = \sqrt{\frac{2 \times 400}{3}} \\ \ell_1 &= \frac{20\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

- Périmètre du cercle de base.
  La longueur du cercle de base du cône est donc :

$$\mathcal{P} = 2\pi\ell_1 = 2\pi\frac{20\sqrt{6}}{3}$$

- Calcul de l'angle θ correspondant.
  La longueur du cercle de base du cône est aussi celle du cercle initial moins la longueur de l'arc du secteur angulaire découpé. On en déduit l'égalité (avec $R = 20$ cm) :

$$\begin{aligned}2\pi R - R\alpha = \mathcal{P} &\iff 40\,\pi - 20\,\alpha = 2\pi\frac{20\sqrt{6}}{3} \\ &\iff -20\,\alpha = 2\pi\frac{20\sqrt{6}}{3} - 40\pi \\ &\iff \alpha = -2\pi\,\frac{\sqrt{6}}{3} + 2\pi \\ &\iff \alpha = 2\pi\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)\end{aligned}$$

- Conclusion : pour découper le disque en carton afin d'avoir un volume maximum il faut découper un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure $\alpha = 2\pi\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$ radian, ce qui représente un angle, arrondi au degré près, de $\underline{66^\circ}$.

$$2\pi\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right) \times \frac{180}{\pi} \approx 66,06^\circ$$

2. L'angle α dépend-il du rayon R du disque en carton ?

On peut reprendre rapidement les calculs menés précédemment avec R quelconque cette fois.

- On obtient :

$$V : \left\{ \begin{array}{ccl}]0\,;R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & V(h) = \dfrac{1}{3}\,\pi\,\left(R^2\,h - h^3\right) \end{array} \right.$$

- Puis

$$V'(h) = \frac{1}{3}\,\pi\,\left(R^2 - 3h^2\right)$$

Les racines de la fonction dérivée V' sont :

$$h_1 = \frac{R\sqrt{3}}{3} \in\,]0\,;R[\quad \text{et} \quad h_2 = -\frac{R\sqrt{3}}{3} \notin\,]0\,;R[$$

Donc sur $]0\,;R[$, V' est du signe du coefficient de h^2 donc négatif après h_1 et positif avant. On obtient :

h	0		$\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$		R
Signe de $V'(h)$		$+$	0	$-$	
Variations de V	0	$\nearrow$	$V\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{3}\right)$	$\searrow$	0

Donc il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum et cette valeur est $h_1 = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

- Calcul de ℓ.
On a vu lors de la question (1a.) que : $\ell = \sqrt{R^2 - h^2}$ donc le rayon du disque de base correspondant au volume maximal est :

$$\ell_1 = \sqrt{R^2 - h_1^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}}$$

$$\ell_1 = \sqrt{\frac{2 \times R^2}{3}} = \frac{R\sqrt{6}}{3}$$

- Périmètre du cercle de base.
La longueur du cercle de base du cône est donc :

$$\mathcal{P} = 2\pi\ell_1 = 2\pi\frac{R\sqrt{6}}{3}$$

- Calcul de l'angle θ correspondant.
La longueur du cercle de base du cône est aussi celle du cercle initial moins la longueur de l'arc du secteur angulaire découpé. On en déduit l'égalité :

$$\begin{aligned} 2\pi R - R\alpha = \mathcal{P} &\iff 2\pi R - R\alpha = 2\pi\frac{R\sqrt{6}}{3} \\ &\iff -R\,\alpha = 2\pi\frac{R\sqrt{6}}{3} - 2\pi R \\ &\iff \alpha = -2\pi\,\frac{\sqrt{6}}{3} + 2\pi \\ &\iff \alpha = 2\pi\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right) \end{aligned}$$

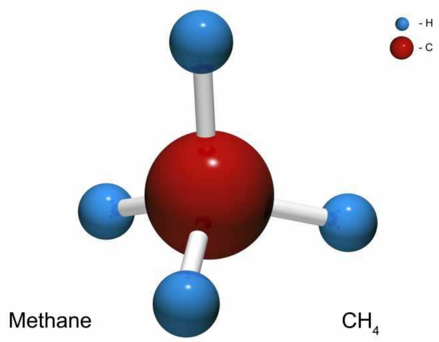
- Conclusion : pour découper le disque en carton afin d'avoir un volume maximum il faut découper un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure $\alpha = 2\pi\left(\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$ radian, soit arrondi au degré près, de 66°.
L'angle α ne dépend pas du rayon R du disque en carton.

Exercice 3. Dans le cube — 4 points

Commun à tous les candidats

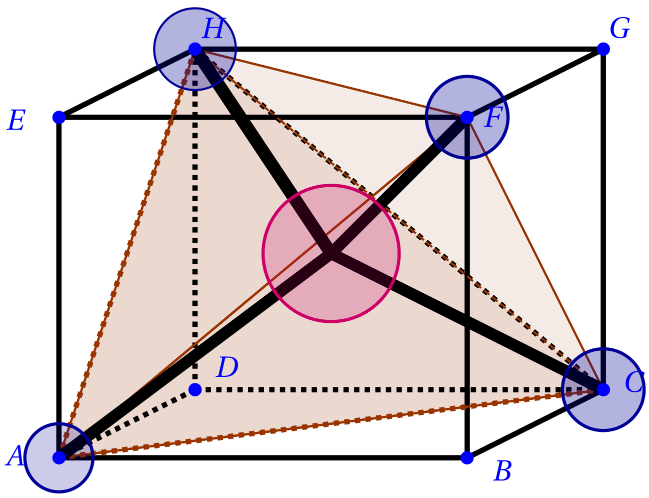
Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

- Les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier.
- Le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.



L'objectif est de déterminer une mesure de l'angle entre deux liaisons carbone-hydrogène. Un tétraèdre régulier est un polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

1. **Justifier qu'on peut inscrire ce tétraèdre dans un cube ABCDEFGH en positionnant deux atomes d'hydrogène sur les sommets A et C du cube et les deux autres atomes d'hydrogène sur deux autres sommets du cube. Représenter la molécule dans le cube donné en annexe**.



En positionnant deux atomes d'hydrogène sur les sommets A et C du cube, on a fixé la mesure des côtés du tétraèdre régulier comme étant la longueur $AC = \ell$, diagonale du carré ABCD. Les autres sommets du tétraèdre doivent donc être à une longueur ℓ des sommets A et C. Il suffit de positionner les deux autres atomes sur les sommets F et H du cube. On ne considère que des diagonales des faces carrées donc ces deux sommets sont tels que :

$$\begin{cases} FA = FC = FH = \ell \\ HA = HC = HF = \ell \end{cases}$$

Dans la suite de l'exercice, on pourra travailler dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

2. **Démontrer que l'atome de carbone est au centre Ω du cube.**

- Le centre Ω du cube est le milieus des diagonales, donc par exemple le milieu du segment [AG]. Dans le repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$ on a alors :

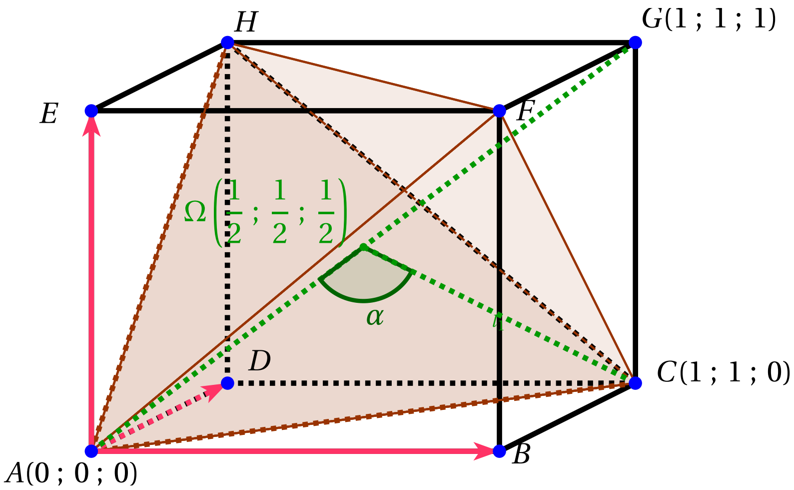
$$\begin{cases} A(0\,;\,0\,;\,0) \\ G(1\,;\,1\,;\,1) \end{cases} \Longrightarrow \Omega\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$$

- Calcul des distances aux sommets. Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$ on a alors :

$$\begin{cases} A(0\,;\,0\,;\,0) \\ C(1\,;\,1\,;\,0) \\ F(1\,;\,0\,;\,1) \\ H(0\,;\,1\,;\,1) \\ \Omega\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \Omega A^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \\ \text{et de même} \\ \Omega C^2 = \Omega F^2 = \Omega H^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

- Conclusion : l'atome de carbone est au centre Ω du cube.

3. Déterminer l'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène c'est-à-dire l'angle $\widehat{A\Omega C}$.



On va calculer le produit scalaire des deux vecteurs de deux façons pour en déduire le cosinus de l'angle cherché.

- D'une part on a dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$ on a :

$$\begin{cases} \Omega\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right) \\ A(0\,;\,0\,;\,0) \\ C(1\,;\,1\,;\,0) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\Omega C}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc le produit scalaire des deux vecteurs donne :

$$\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} . \overrightarrow{\Omega C}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$$

- D'autre part on a la relation :

$$\overrightarrow{\Omega A}\,.\,\overrightarrow{\Omega C} = \Omega A \times \Omega C \times \cos\widehat{A\Omega C}$$

Or on a vu lors de la question précédente que : $\Omega A^2 = \Omega C^2 = \frac{3}{4}$ donc :

$$\overrightarrow{\Omega A}\,.\,\overrightarrow{\Omega C} = \Omega A^2 \times \cos\widehat{A\Omega C} = \frac{3}{4}\cos\widehat{A\Omega C}$$

- Pour conclure :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega A}\,.\,\overrightarrow{\Omega C} = -\frac{1}{4} \\ \overrightarrow{\Omega A}\,.\,\overrightarrow{\Omega C} = \frac{3}{4}\cos\widehat{A\Omega C} \end{cases} \Longrightarrow \cos\widehat{A\Omega C} = -\frac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{\widehat{A\Omega C} = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109{,}5°}$$

Exercice 4. Obligatoire : fonction — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en m.s^{-1}, de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi pour tout réel positif ou nul t, on a :

$$v(t) = 9,81\,\frac{m}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air. On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Cas général

1. **Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.**

La fonction v est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$. Elle est de la forme $K \times (1-\mathrm{e}^{u})$ donc de dérivée $K \times \left(-u'\right) \times \mathrm{e}^{u}$ avec pour tout t de $[0\,;+\infty[$:

$$u(t) = -\frac{k}{m}\,t \quad \Longrightarrow \quad u'(t) = -\frac{k}{m}$$

On obtient donc pour tout t de $[0\,;+\infty[$:

$$v'(t) = 9,81 \times \frac{m}{k} \times \left(\frac{k}{m}\right) \times \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} = \underline{9,81\ \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la dérivée est strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ et la fonction <u>v est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$</u>.

2. **La goutte ralentit-elle au cours de sa chute ?**

Nous venons de montrer que la fonction v est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Donc la vitesse de la goutte augmente en fonction du temps. La goutte ne ralentit donc pas au cours de sa chute.

3. **Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t) = 9,81\frac{m}{k}$. Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.**

On a par composition des limites :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{t\to+\infty} -\frac{k}{m}\,t = -\infty \text{ , (car } k \text{ et } m \text{ positifs)} \\ \displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \end{array}\right. \quad \underset{\text{Par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} = 0$$

De ce fait

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right) = 1 \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} 9,81\,\frac{m}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right) = 9,81\frac{m}{k}$$

Soit

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} v(t) = 9,81\frac{m}{k}}$$

4. **Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\dfrac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99% de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?**

Au bout d'une durée de chute égale à $\dfrac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte est de :

$$v\left(\frac{5m}{k}\right) = 9,81\,\frac{m}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}\times\left(\frac{5m}{k}\right)}\right) = 9,81\,\frac{m}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-5}\right)$$

En notant L la vitesse limite calculée lors de la question (3.), cette vitesse représente :

$$\frac{v\left(\dfrac{5m}{k}\right)}{L} = \frac{9,81\,\dfrac{m}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-5}\right)}{9,81\dfrac{m}{k}} = \left(1-\mathrm{e}^{-5}\right) \approx \underline{99,33\% > 99\%}$$

<u>Conclusion</u> : le scientifique a raison, au bout d'une durée de chute égale à $\dfrac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99% de sa vitesse limite L.

Partie B

Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3,9$. À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est 15 m.s^{-1}.

Puisque $m = 6$ et $k = 3,9$ on a dans cette partie :

$$v : \left\{ \begin{array}{rcl} [0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & v(t) = 9,81 \times \dfrac{6}{3,9}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3,9}{6}\,t}\right) \end{array} \right.$$

1. **Depuis combien de temps la goutte s'est-elle détachée de son nuage? Arrondir la réponse au dixième de seconde.** À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est 15 m.s^{-1}on cherche donc t tel que $v(t) = 15$m.s^{-1}.

$$\begin{aligned} v(t) = 15 &\Longleftrightarrow 9,81 \times \frac{6}{3,9}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3,9}{6}\,t}\right) = 15 \\ &\Longleftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3,9}{6}\,t} = 15 \times \frac{3,9}{9,81 \times 6} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{3,9}{6}\,t} = 1 - \frac{325}{327} = \frac{2}{327} \end{aligned}$$

On compose par la fonction ln qui est définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} v(t) = 15 &\Longleftrightarrow -\frac{3,9}{6}\,t = \ln\frac{2}{327} \\ v(t) = 15 &\Longleftrightarrow t = -\frac{6}{3,9} \times \ln\frac{2}{327} \approx \underline{7,8\text{ s}} \end{aligned}$$

Donc si un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est 15 m.s^{-1}, la goutte s'est détachée de son nuage depuis environ 7,8 secondes.

2. **En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse. Arrondir la réponse au dixième de m.s^{-1}.**
La vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse, soit $t_0 \approx 7,8$ s se détermine en calculant la valeur moyenne $\overline{v}$ de la fonction v sur l'intervalle $[0\,;\,t_0]$. On a par définition

$$\overline{v} = \frac{1}{t_0 - 0} \times \int_0^{t_0} v(t)\,\mathrm{d}t$$

Une primitive de la fonction $t \to \mathrm{e}^{k\times t}$ est la fonction $t \to \dfrac{1}{k} \times \mathrm{e}^{k\times t}$. Par conséquent, une primitive sur $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction

$$v \;:\; t \to 9,81 \times \frac{6}{3,9}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3,9}{6}\,t}\right)$$

est (par exemple) la fonction

$$V \;:\; t \to 9,81 \times \frac{6}{3,9}\left(t + \frac{6}{3,9} \times \mathrm{e}^{-\frac{3,9}{6}\,t}\right)$$

On obtient donc avec $t_0 \approx 7,8$:

$$\begin{aligned} \overline{v} &= \frac{1}{t_0 - 0} \times \int_0^{t_0} v(t)\,\mathrm{d}t \\ \overline{v} &= \frac{1}{t_0} \times \left(V\left(t_0\right) - V(0)\right) \\ \overline{v} &\approx \frac{1}{7,8} \times \left(9,81 \times \frac{6}{3,9}\left(7,8 + \frac{6}{3,9} \times \mathrm{e}^{-\frac{3,9}{6}\times 7,8}\right) - 9,81 \times \frac{6}{3,9} \times \frac{6}{3,9}\right) \\ \overline{v} &\approx \underline{12,1\text{m.s}^{-1}} \end{aligned}$$

La vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse est, arrondie au dixième, d'environ 12,1 m.s^{-1}.

Exercice 4. Spécialité : arithmétique 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématique

Une personne a mis au point le procédé de cryptage suivant :

- *Á chaque lettre de l'alphabet, on associe un entier n comme indiqué ci-dessous :*

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- *On choisit deux entiers a et b compris entre 0 et 25.*
- *Tout nombre entier n compris entre 0 et 25 est codé par le reste de la division euclidienne de $an+b$ par 26.*

Le tableau suivant donne les fréquences f en pourcentage des lettres utilisées dans un texte écrit en français.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
f	9.42	1.02	2.64	3.38	15.87	0.94	1.04	0.77	8.41	0.89	0	5.33	3.23
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
f	7.14	5.13	2.86	1.06	6.46	7.9	7.26	6.24	2.15	0	0.3	0.24	0.32

Partie A

Un texte écrit en français et suffisamment long a été codé selon ce procédé. L'analyse fréquentielle du texte codé a montré qu'il contient 15,9% de O et 9,4% de E. On souhaite déterminer les nombres a et b qui ont permis le codage.

1. Quelles lettres ont été codées par les lettres O et E ?

- L'analyse fréquentielle du texte codé a montré qu'il contient 15,9% de O. Or d'après le tableau des fréquences f en pourcentage des lettres utilisées dans un texte écrit en français, la lettre correspondante à la fréquence la plus proche est le E avec 15.87%.
- De même, le texte codé a montré qu'il contient 9,4% de E. Or d'après le tableau, la lettre correspondante à la fréquence la plus proche est le A avec 9.42%.
- Conclusion : La lettre E a été codée par la lettre O et la lettre A par le E.

2. Montrer que les entiers a et b sont solutions du système $\begin{cases} \boldsymbol{4a+b\equiv 14\ (26)} \\ \boldsymbol{b\equiv 4\ (26)} \end{cases}$ **.**

- La lettre E (4) a été codée par la lettre O (14) donc pour $n=4$,le reste de la division euclidienne de $an+b$ par 26 est 14 soit avec $n=4$:
$$an+b\equiv 14\ (26) \Longleftrightarrow 4a+b\equiv 14\ (26)$$
- La lettre A (0) a été codée par la lettre E (4) donc pour $n=0$,le reste de la division euclidienne de $an+b$ par 26 est 4 soit avec $n=0$:
$$an+b\equiv 4\ (26) \Longleftrightarrow b\equiv 4\ (26)$$
- Conclusion : les entiers a et b sont solutions du système $\begin{cases} 4a+b\equiv 14\ (26) \\ b\equiv 4\ (26) \end{cases}$

3. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) ayant pu permettre le codage de ce texte.

$$\begin{cases} 4a+b \equiv 14\ (26) \\ b \equiv 4\ (26) \end{cases} \iff \begin{cases} 4a+4 \equiv 14\ (26) \\ b \equiv 4\ (26) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 4a \equiv 10\ (26) \\ b \equiv 4\ (26) \end{cases}$$

Il nous faut donc résoudre l'équation modulaire $4a \equiv 10\ (26)$, ce qui peut se traiter en étudiant tous les cas possibles modulo 26.

On va étudier les différents restes possibles :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12
$4a$	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
$4a\ (26)$	0	4	8	12	16	20	24	2	6	**10**	14	18	22
a	13	14	15	16	17	18	19	20	21	**22**	23	24	25
$4a$	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100
$4a\ (26)$	0	4	8	12	16	20	24	2	6	**10**	14	18	22

Donc on obtient deux valeurs possibles : $a = 9$ ou $a = 22$. Les couples solutions sont donc : $\underline{(9\ ;\ 4) \text{ et } (22\ ;\ 4)}$.

Remarque

On cherche à résoudre l'équation modulaire $4a \equiv 10\ (26)$. On a le théorème suivant qui n'est pas explicitement au programme de la classe de terminale.

Théorème 2 (Les congruences $ka \equiv b(mod n)$)

Les congruences $ka \equiv b(mod n)$

- Si k et n sont premiers entre eux, alors il existe une solution a de $ka \equiv b(mod n)$.
  La solution est unique modulo n.
- Il existe une solution a de $ka \equiv b(mod n)$ si et seulement si $d = PGCD(k\ ;\ n)$ divise b.
  La solution est unique modulo $\dfrac{n}{d}$.

Partie B

1. On choisit $a = 22$ et $b = 4$.

1. a. Coder les lettres K et X.

$a = 22$ et $b = 4$

Lettre	K	X
n	10	23
$an + b = 22n + 4$	224	510
$an + b\ \ [26] = 22n + 4\ \ [26]$	16	16
Codage	Q	Q

Les lettres K et X sont codées par la lettre Q.

1. b. Ce codage est-il envisageable ?

Deux lettres différentes sont codés par la même lettre. Ce codage n'est donc pas envisageable.

2. On choisit $a = 9$ et $b = 4$.

2. a. Montrer que pour tous entiers naturels n et m, on a : $\quad m \equiv 9n + 4 \quad [26] \iff n \equiv 3m + 14 \quad [26]$

Pour tous entiers naturels n et m, on a :

$$\begin{aligned} m \equiv 9n+4\ \ [26] &\iff \begin{cases} 3m \equiv 27n + 12\ \ [26] \\ \text{avec}\ \ 27 \equiv 1 \quad [26] \end{cases} \\ &\iff 3m \equiv n + 12 \quad [26] \\ &\iff 3m \equiv n + \underbrace{(26-14)}_{12} \quad [26] \\ &\iff 3m + 14 \equiv n + 26 \quad [26] \\ &\iff \underline{3m + 14 \equiv n \quad [26]} \end{aligned}$$

2. b. Décoder le mot AQ.

- D'après la question **(B.2a)** si la lettre associée à l'entier n est codée en la lettre associée à m, alors :

$$m \equiv 9n + 4 \quad [26] \iff n \equiv 3m + 14 \quad [26]$$

- A est associé au nombre $m_1 = 0$ donc :

$$n_1 \equiv 3m_1 + 14 \quad [26] \Longrightarrow n_1 \equiv 3 \times 0 + 14 \quad [26] \Longrightarrow \underline{n_1 \equiv 14 \quad [26]}$$

  Donc O a été codé en A.
- Q est associé au nombre $m_2 = 16$ donc :

$$n_2 \equiv 3m_2 + 14 \quad [26] \Longrightarrow n_2 \equiv 3 \times 16 + 14 \quad [26] \Longrightarrow \underline{n_2 \equiv 10 \quad [26]}$$

  Donc K a été codé en Q.
- Le décodage du mot <u>AQ est le mot OK</u>.

Fin du devoir