

Baccalauréat S

Session 2019 Centres Étrangers Afrique - Mathématiques

Document sous license Art Libre (<http://artlibre.org>)

Proposition de corrigé par Thomas Harbreteau. Pour toute question ou remarque éventuelle, vous pouvez me contacter à l'adresse mail suivante : tharbreteau@protonmail.com.

Exercice n° 1 Commun à tous les candidats

1. On considère l'expérience aléatoire "demander à un client s'il fait du surf", qui possède deux issues :

- le client fait du surf, de probabilité égale à 0,25 d'après l'énoncé,
- le client ne fait pas de surf, de probabilité égale à $1 - 0,25 = 0,75$.

Il s'agit d'une expérience de Bernouilli, de paramètre 0,25.

Interroger les 80 clients revient donc à répéter 80 fois cette expérience aléatoire, et on peut considérer ces répétitions indépendantes, le fait qu'un client fasse du surf étant indépendant du fait que son voisin en fasse, ou non. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de clients faisant du surf, alors X d'après ce que l'on vient de dire, X suit une loi binomiale de paramètres $(80; 0,25)$. On en déduit que

$$\mathbf{P}(X = 20) = \binom{80}{20} 0,25^{20} (1 - 0,25)^{80-20} = \binom{80}{20} 0,25^{20} \times 0,75^{60} \simeq 0,103.$$

La réponse **d)** est donc la bonne réponse.

2. Comme la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $\mu = 150$, on sait que :

$$\forall a > 0, \quad \mathbf{P}(X \geq \mu + a) = \mathbf{P}(X \leq \mu - a),$$

donc pour $a = 50$, $\mathbf{P}(X \geq 150 + 50) = \mathbf{P}(X \leq 150 - 50)$, soit $\mathbf{P}(X \geq 200) = \mathbf{P}(X \leq 100)$. De plus, $\mathbf{P}(X \geq 100) = 1 - \mathbf{P}(X < 100) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 100)$ car la loi normale est une loi de probabilité continue, d'où $\mathbf{P}(X \geq 100) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 200) = 1 - 0,025 = 0,975$. La réponse **d)** est donc la bonne.

3. Notons $\lambda \in \mathbf{R}$ le paramètre de T , on sait que $\mathbf{E}(T) = 1/\lambda$, donc $\lambda = 1/5$. Enfin, T suivant une loi exponentielle de paramètre λ , $\mathbf{P}(T \geq 5) = e^{-5\lambda} = e^{-1}$. La bonne réponse est donc **c)**.

4. Soit un échantillon de $n \in \mathbf{N}^*$ clients. Notons f la proportion de clients satisfaits observée dans cet échantillon. Un intervalle de confiance à 95% de la probabilité qu'un client soit satisfait est donc $[f - 1/\sqrt{n}, f + 1/\sqrt{n}]$, donc sa longueur est égale à $f + 1/\sqrt{n} - (f - 1/\sqrt{n}) = 2/\sqrt{n}$. On cherche donc n tel que $2/\sqrt{n} = 0,04$, soit $n = (2/0,04)^2 = 2500$. La réponse **b)** est la bonne.

Exercice n° 2 Commun à tous les candidats

Partie A

1. Si $u_1 = 0$,

- $u_2 = (1 + 1)u_1 - 1 = 2 \times 0 - 1 = -1$,
- $u_3 = (2 + 1)u_2 - 1 = 3 \times (-1) - 1 = -4$,
- $u_4 = (3 + 1)u_3 - 1 = 4 \times (-4) - 1 = -17$.

2. En entrée du premier tour de boucle, $N = 1$ et $U = u_1$, et on souhaite calculer u_2 . La variable U va donc prendre la valeur $(N + 1)U - 1$, ce qui conduit à l'écriture du code suivante :

```
1 |   Pour N allant de 1 à 12
2 |       U <- (N+1)U - 1
3 |   Fin Pour
```

3. Si $u_1 = 0,7$, la suite (u_n) semble tendre vers $-\infty$. Si $u_1 = 0,8$, la suite (u_n) semble tendre vers $+\infty$.

Partie B

1. Les fonctions $u : x \mapsto -1 - x$ et $v : x \mapsto 1 - x$ sont définies et dérivables sur $[0, 1]$ et on a $F = u \times e^v$. Par opérations, F est dérivable sur $[0, 1]$ et par formule de dérivation d'un produit,

$$F' = u'e^v + u \times (e^v)'$$

Par formule de dérivation de la fonction composée e^v ,

$$F' = u'e^v + u \times v' \times e^v,$$

donc : $\forall x \in [0, 1], F'(x) = -e^{1-x} + (-1 - x)(-e^{1-x}) = (-1 + 1 + x)e^{1-x} = xe^{1-x} = f(x)$. La fonction F est donc bien une primitive de f sur $[0, 1]$.

2. Par définition,

$$I_1 = \int_0^1 x^1 e^{1-x} dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

Comme d'après 1, F est une primitive de f sur $[0, 1]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$I_1 = F(1) - F(0) = (-1 - 1)e^{1-1} - (-1 - 0)e^{1-0} = e - 2.$$

3. Remarque : La relation admise est obtenue par intégration par parties. Si $I = [a, b]$ est un intervalle de \mathbf{R} , u et v deux fonctions à valeurs réelles définies et dérivables sur I ,

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v.$$

Démonstration : La formule de dérivation d'un produit de fonctions permet d'écrire : $(uv)' = u'v + uv'$, donc en intégrant cette relation entre a et b , on obtient bien

$$[uv]_a^b = \int_a^b u'v + \int_a^b uv', \quad \text{soit} \quad \int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v.$$

D'après 1, $I_1 = e - 2$ donc d'après la relation admise, $I_2 = (1 + 1)I_1 - 1 = 2(e - 2) - 1 = 2e - 5$.

4. a. Étant donné que

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq 1 - x \leq 1,$$

par croissance de la fonction exponentielle sur \mathbf{R} ,

$$\forall x \in [0, 1], \quad 1 \leq e^{1-x} \leq e.$$

De plus, pour tout $x \in [0, 1]$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leq x^n$ donc multiplier l'inégalité précédente par x^n ne change pas le sens des inégalités. On obtient donc que

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e.$$

b. Par linéarité de l'intégrale,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \int_0^1 x^n e dx = e \int_0^1 x^n dx = e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{e}{n+1}.$$

c. Par croissance de l'intégrale, en intégrant l'inégalité obtenue en 4.a, il vient que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e dx.$$

D'après 4.b et par définition de (I_n) , l'inéquation précédente se réécrit : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq e/(n+1)$.

d. Comme la suite $(e/(n+1))$ a une limite nulle, la question 4.c montre, avec le théorème des gendarmes, que la suite (I_n) a une aussi limite nulle.

Partie C

1. Notons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, (H_n) : “ $u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n$ ”.

- Initialisation : Comme $1!(u_1 - e + 2) + I_1 = u_1 + I_1 - (2 - e)$, d’après **Partie B, 2**, $I_1 = 2 - e$ donc $1!(u_1 - e + 2) + I_1 = u_1$. L’hypothèse (H_1) est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que (H_n) soit vraie. Par définition,

$$u_{n+1} = (n + 1)u_n - 1 = (n + 1)(n!(u_1 - e + 2) + I_n) - 1 = (n + 1)!(u_1 - e + 2) + (n + 1)I_n - 1.$$

D’après la relation admise, $I_{n+1} = (n + 1)I_n - 1$ donc $u_{n+1} = (n + 1)!(u_1 - e + 2) + I_{n+1}$, ce qui montre que (H_{n+1}) est vraie.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n$.

2. a. Remarque : Il y a plusieurs manières de montrer la limite admise, l’une d’elle consiste à montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n! \geq n$.

Si $u = 0,7$, numériquement, $u_1 - e + 2 < 0$. D’après **Partie B, 4.c**, la limite de (I_n) est 0 et il est admis que $n! \rightarrow_{(n \rightarrow +\infty)} +\infty$, donc d’après **1**, $u_n \rightarrow_{(n \rightarrow +\infty)} -\infty$.

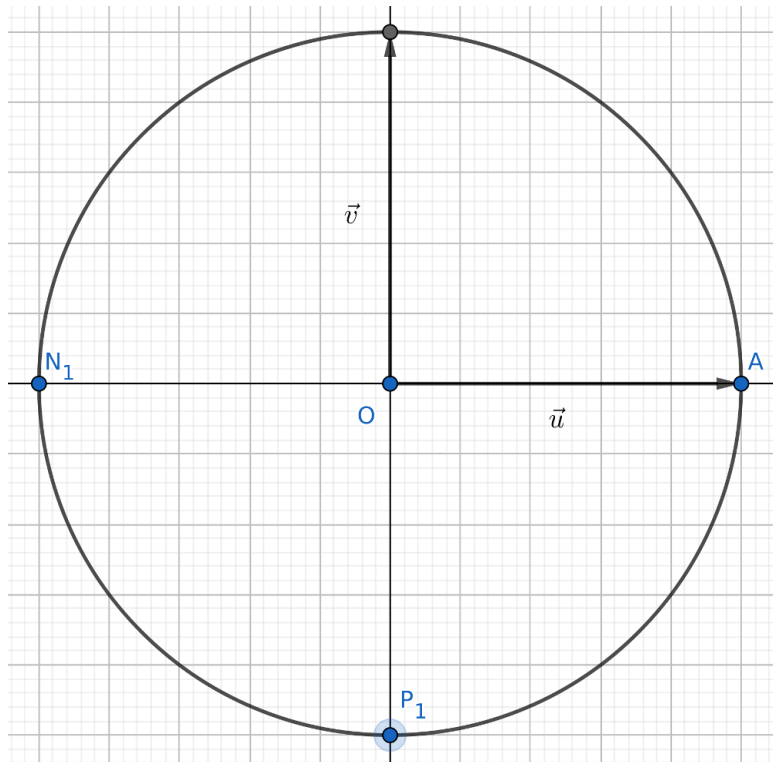
b. Si $u_1 = 0,8$, numériquement, $u_1 - e + 2 > 0$. Par les mêmes arguments qu’en **2.a**, $u_n \rightarrow_{(n \rightarrow +\infty)} +\infty$.

Exercice n° 3 Commun à tous les candidats

Partie A Étude d’exemples

1. a. On a $z^2 = i^2 = -1$ et $1/z = 1/i = -i$.

b. Les points A , N et P ne sont pas alignés.

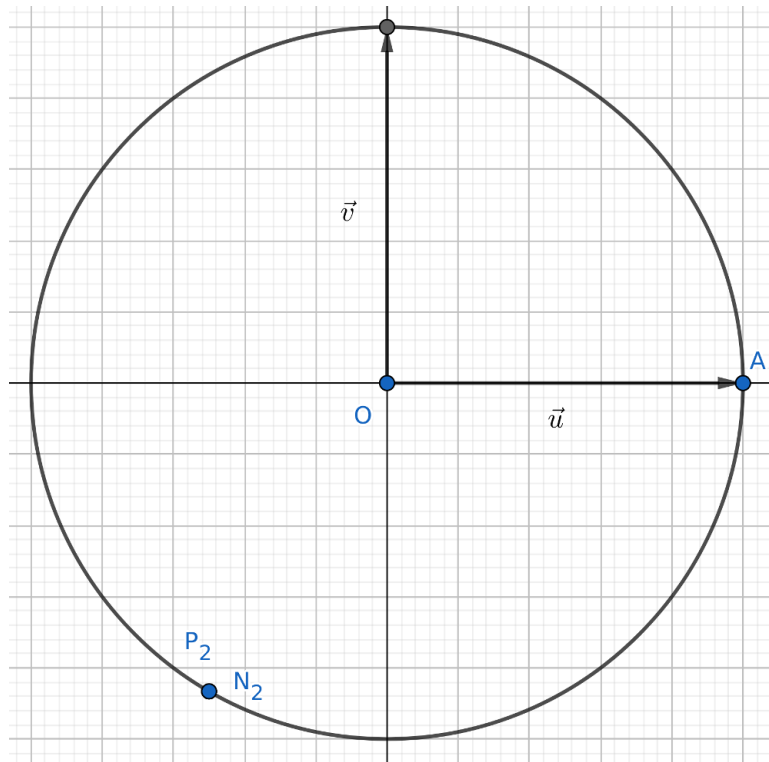


2. Notons Δ le discriminant de l’équation $z^2 + z + 1$ d’inconnue $z \in \mathbf{C}$, alors $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Cette équation admet donc deux racines complexes conjuguées,

$$\frac{-1 - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

3. a. On sait que $-1/2 = \cos(2\pi/3)$ et $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$, donc $z = e^{2i\pi/3}$. On en déduit que $z^2 = e^{4i\pi/3}$ et $1/z = e^{-2i\pi/3} = e^{4i\pi/3} = z^2$.

b. Les points A , N et P sont alignés, les points N et P étant confondus.



Partie B Étude du cas général

1. Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$,

$$(z^2 + z + 1) \left(1 - \frac{1}{z}\right) = z^2 - z + z - 1 + 1 - \frac{1}{z} = z^2 - \frac{1}{z}.$$

2. Notons $\vec{U} = \overrightarrow{PN}$, d'affixe $z_{\vec{U}} = z_N - z_P = z^2 - 1/z$ ainsi que $\vec{V} = \overrightarrow{PA}$, d'affixe $z_{\vec{V}} = z_A - z_P = 1 - 1/z$. Les vecteurs \vec{U} et \vec{V} sont donc colinéaires si et seulement si il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $z_{\vec{V}} = kz_{\vec{U}}$, si et seulement si il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $z^2 - 1/z = k(1 - 1/z)$. D'après 1, $z^2 - 1/z = (z^2 + z + 1)(1 - 1/z)$ donc

$$\begin{aligned} \exists k \in \mathbf{R}, \quad z^2 - \frac{1}{z} = k \left(1 - \frac{1}{z}\right) &\iff \exists k \in \mathbf{R}, \quad \left(1 - \frac{1}{z}\right) (z^2 + z + 1) = k \left(1 - \frac{1}{z}\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbf{R}, \quad \left(1 - \frac{1}{z}\right) (z^2 + z + 1 - k) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbf{R}, \quad \left(1 - \frac{1}{z} = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 + z + 1 = k\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbf{R}, \quad (z = 1 \quad \text{ou} \quad z^2 + z + 1 = k). \end{aligned}$$

Mais s'il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $z = 1$ ou $z^2 + z + 1 = k$, $z^2 + z + 1 \in \mathbf{R}$. Réciproquement, si $z^2 + z + 1 \in \mathbf{R}$, il existe bien $k \in \mathbf{R}$ tel que $z^2 + z + 1 = k$. On en déduit que

$$\exists k \in \mathbf{R}, \quad (z = 1 \quad \text{ou} \quad z^2 + z + 1 = k) \iff z^2 + z + 1 \in \mathbf{R},$$

donc \vec{U} et \vec{V} sont colinéaires si et seulement si $z^2 + z + 1 \in \mathbf{R}$.

3. On a bien

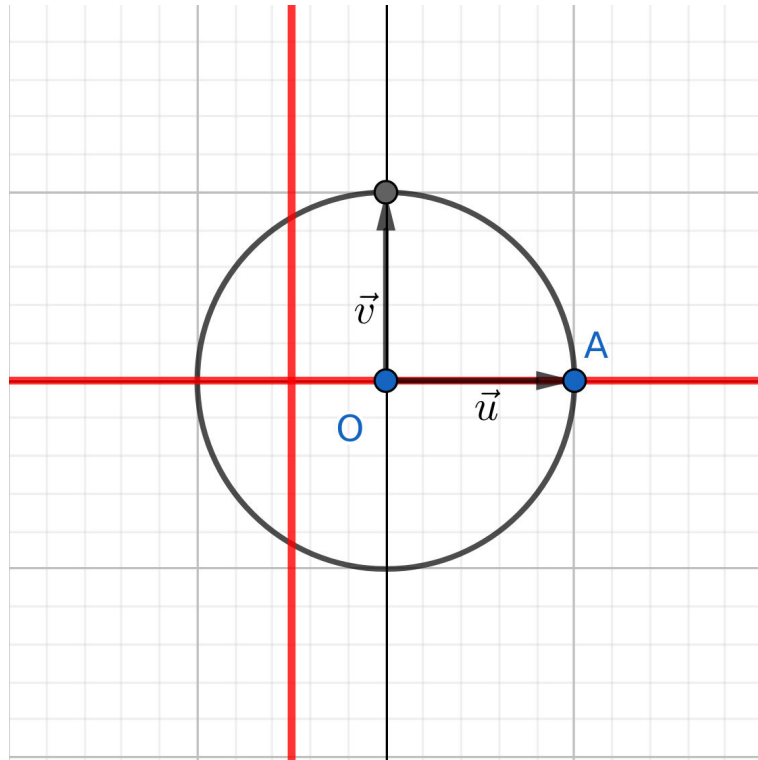
$$z^2 + z + 1 = (x + iy)^2 + x + iy + 1 = x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y).$$

4. a. Soit $z \neq 0$, on note $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Les points A , N et P d'affixes respectives 1, z^2 et $1/z$ sont alignés si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{PN} et \overrightarrow{PA} sont colinéaires, donc d'après 2, si et seulement si $z^2 + z + 1 \in \mathbf{R}$. D'après 3, la partie imaginaire de $z^2 + z + 1$ est égale à $2xy + y = (2x + 1)y$, d'où

$$z^2 + z + 1 \in \mathbf{R} \iff (2x + 1)y = 0 \iff \left(x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad y = 0\right).$$

On en déduit que l'ensemble des points recherché est l'ensemble des points d'abscisse égale à $-1/2$ ou d'ordonnée égale à 0.

b. L'ensemble des solutions trouvé en 4.a est représenté par des traits rouges.



Exercice n° 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Comme $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} = 2(\frac{1}{6}\vec{AB}) = 2\vec{i}$, les coordonnées de P sont $(2; 0; 0)$.
 De même, $\vec{AQ} = \frac{1}{3}\vec{AE} = 2(\frac{1}{6}\vec{AE}) = 2\vec{k}$ donc les coordonnées de Q sont $(0; 0; 2)$.
 Enfin, Ω étant le centre du cube, il vérifie

$$\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE} = 3 \left(\frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AD} + \frac{1}{6}\vec{AE} \right) = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Les coordonnées de Ω sont donc $(3; 3; 3)$.

b. Soit $b, c \in \mathbf{R}$, notons $\vec{n} = (1; b; c)$. Les vecteurs \vec{PQ} et \vec{QR} sont des vecteurs non colinéaires du plan (PQR) , donc sont deux vecteurs directeurs de ce plan. Le vecteur \vec{n} est donc normal à (PQR) si et seulement si il est orthogonal à ces deux vecteurs. Calculons les coordonnées du point R . Par relation de Chasles,

$$\vec{AR} = \vec{AE} + \vec{EH} + \vec{HR} = \vec{AE} + \vec{EH} + \frac{1}{3}\vec{HE} = \vec{AE} + \vec{EH} - \frac{1}{3}\vec{EH} = \vec{AE} + \frac{2}{3}\vec{EH}.$$

Comme $\vec{EH} = \vec{AD}$, on a $\vec{AR} = 6(\frac{1}{6}\vec{AE}) + \frac{2}{3}6(\frac{1}{6}\vec{AD}) = 6(\frac{1}{6}\vec{AE}) + 4(\frac{1}{6}\vec{AD}) = 6\vec{k} + 4\vec{j}$, donc les coordonnées de R sont $(0; 4; 6)$, d'où

$$\vec{RQ} = (0 - 2; 0 - 0; 2 - 0) = (-2; 0; 2) \quad \text{et} \quad \vec{QR} = (0 - 0; 4 - 0; 6 - 2) = (0; 4; 4).$$

On a donc

$$\begin{cases} \vec{PQ} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{QR} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \times 1 + 0 \times b + 2 \times c = -2 + 2c = 0 \\ 0 \times 1 + 4 \times b + 4 \times c = 4b + 4c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ b = -1. \end{cases}$$

Pour conclure, $\vec{n} = (1; b; c)$ est normal au plan (PQR) si et seulement si $b = -1$ et $c = 1$.

c. D'après 1.b, un vecteur normal au plan (PQR) est $(1; -1; 1)$ donc une équation cartésienne de ce plan est de la forme

$$x - y + z + a = 0,$$

où a est un réel à déterminer. D'après 1.a, les coordonnées de P sont $(2; 0; 0)$, et c'est un point de (PQR) , donc a vérifie

$$2 - 0 + 0 + a = 0, \quad \text{d'où} \quad a = -2.$$

Une équation cartésienne de (PQR) est donc $x - y + z - 2 = 0$.

2. a. Comme la droite Δ est perpendiculaire au plan (PQR) , tout vecteur normal à ce plan est un vecteur directeur de cette droite. En particulier, le vecteur $(1; -1; 1)$, qui est bien normal à (PQR) d'après **1.b**, est un vecteur directeur de Δ . Comme le point Ω , dont les coordonnées sont $(3; 3; 3)$ d'après **1.a**, appartient à cette droite, une représentation paramétrique de Δ est

$$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = -t + 3 \\ z = t + 3. \end{cases}$$

b. Notons I le point d'intersection de Δ et de (PQR) . Comme $I \in \Delta$, la représentation paramétrique de Δ établie en **2.a** montre qu'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que les coordonnées de I soient $(t + 3; -t + 3; t + 3)$. De plus, $I \in (PQR)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan établie en **1.c**, donc t vérifie

$$t + 3 - (-t + 3) + t + 3 - 2 = 0, \text{ soit } 3t + 1 = 0, \text{ d'où } t = -\frac{1}{3}.$$

Les coordonnées de I sont donc bien $(-1/3 + 3; -(-1/3) + 3; -1/3 + 3) = (8/3; 10/3; 8/3)$.

c. D'après **1.a**, les coordonnées de Ω sont $(3; 3; 3)$ et d'après **2.b**, celles de I sont $(8/3; 10/3; 8/3)$, donc

$$\Omega I = \sqrt{\left(\frac{8}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{10}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. a. Étant donné que $6 - 4 + 0 - 2 = 0$, les coordonnées de J vérifient l'équation cartésienne de (PQR) établie en **1.c**, donc $J \in (PQR)$.

b. Un vecteur directeur de (JK) est

$$\overrightarrow{JK} = (6 - 6; 6 - 4; 2 - 0) = (0; 2; 2)$$

et un vecteur directeur de (QR) est

$$\overrightarrow{QR} = (0 - 0; 4 - 0; 6 - 2) = (0; 4; 4).$$

On a donc la relation $\overrightarrow{QR} = 2\overrightarrow{JK}$, donc ces deux vecteurs sont colinéaires, ce qui montre que (JK) et (QR) sont parallèles.

c. Le plan (PQR) est représenté en bleu.

