France métropolitaine/Réunion 2018. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) La largeur de la chaînette est $x-(-x)=2x$. La hauteur de la chaînette est l'ordonnée du point M à savoir $\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}-2\right)$. Le problème posé équivaut à trouver $x>0$ tel que $\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}-2\right)=2x$ ou encore tel que $e^x+e^{-x}-2=4x$ ou enfin tel que

$$e^x+e^{-x}-4x-2=0.$$

2) a) Soit $x>0$.

$$f(x)=e^x-4x+e^{-x}-2=x\left(\frac{e^x}{x}-4\right)+e^{-x}-2.$$

b) D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}-4=+\infty$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{e^x}{x}-4\right)=+\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}-2=-2$. En additionnant, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

3) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x)=e^x+(-1)e^{-x}-4=e^x-e^{-x}-4.$$

b) Soit x un réel. $e^x\neq 0$ puis

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-\frac{1}{e^x}-4=0\Leftrightarrow\frac{1}{e^x}\left(\left(e^x\right)^2-1-4e^x\right)=0\Leftrightarrow\left(e^x\right)^2-4e^x-1=0.$$

c) Le discriminant de l'équation $X^2-4X-1=0$ est $\Delta=(-4)^2-4\times1\times(-1)=20>0$. Donc, l'équation $X^2-4X-1=0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions distinctes à savoir $X_1=\dfrac{4-\sqrt{20}}{2}=\dfrac{4-2\sqrt{5}}{2}=2-\sqrt{5}$ et $X_2=2+\sqrt{5}$.

Soit x un réel. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}f'(x)=0&\Leftrightarrow\text{le réel }e^x\text{ est solution de l'équation }X^2-4X-1=0\\&\Leftrightarrow e^x=2-\sqrt{5}\text{ ou }e^x=2+\sqrt{5}\\&\Leftrightarrow e^x=2+\sqrt{5}\ (\text{car }e^x>0\text{ et }2-\sqrt{5}<0)\\&\Leftrightarrow x=\ln\left(2+\sqrt{5}\right).\end{aligned}$$

4) a) Tableau de variations de la fonction f.

x	0		$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-2+2\sqrt{5}-4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0)=e^0+e^0-2=0$ et

$$\begin{aligned}f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)&=e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}+\frac{1}{e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}}-4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)-2=2+\sqrt{5}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}-4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)-2\\&=\sqrt{5}+\frac{2-\sqrt{5}}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}-4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}+\frac{2-\sqrt{5}}{-1}-4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\\&=-2+2\sqrt{5}-4\ln\left(2+\sqrt{5}\right).\end{aligned}$$

On note que le calcul explicite de $f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$ n'est pas utile pour la suite de l'exercice et que ce calcul n'était probablement pas attendu.

b) La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0, \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]$. On en déduit que pour x dans $\left]0, \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]$, on a $f(x) < f(0)$ ou encore $f(x) < 0$. En particulier, la fonction f ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]0, \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]$.

D'autre part, la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right), +\infty\right[$. On sait alors que pour tout réel k de $\left[f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$, l'équation $f(x) = k$ a une solution et une seule dans l'intervalle $\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right), +\infty\right[$. Puisque $f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, le réel 0 appartient à l'intervalle $\left[f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$ et donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right), +\infty\right[$.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $]0, +\infty[$.

5) a) Tableau complété

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2,5	2	2,5	0,5
2,25	2,25	2,5	0,25
2,375	2,375	2,5	0,125
2,4375	2,4375	2,5	0,0625

L'algorithme s'arrête alors car $b - a \leqslant 0,1$. En fin d'algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les nombres $2,4375$ et $2,5$

b) A chaque étape de l'algorithme, on a $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$ et donc $2 \leqslant a \leqslant \alpha \leqslant b \leqslant f$ (car f est croissante sur l'intervalle $[2, 3]$). En particulier, $2,4375 \leqslant \alpha \leqslant 2,5$ avec $2,5 - 2,4375 \leqslant 0,1$. L'algorithme a fourni un encadrement de α d'amplitude au plus 10^{-1}.

6) Soit t_0 la solution strictement positive de l'équation (E'). La hauteur h cherchée, qui est aussi la largeur, est $2t_0$.

D'après la question précédente, $2,4375 \leqslant \dfrac{t_0}{39} \leqslant 2,5$ puis $2 \times 39 \times 2,4375 \leqslant 2t_0 \leqslant 2 \times 39 \times 2,5$ et finalement

$$190,125 \leqslant h \leqslant 195.$$

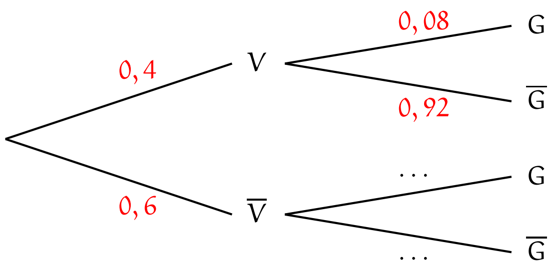
La hauteur de la Gateway Arch est comprise entre 190 et 195 mètres.

EXERCICE 2

Partie A

1) a) L'énoncé donne $P(G) = 0,2$.

b) Arbre pondéré complété.



2) La probabilité demandée est $P(V \cap G)$.

$$P(V \cap G) = P(V) \times P_V(G) = 0,4 \times 0,08 = 0,032.$$

3) Notons p la probabilité que la personne ait contracté la grippe sachant qu'elle n'est pas vaccinée ou encore posons $P_{\overline{V}}(G) = p$. D'après la formule des probabilités totales,

$$0,2 = P(G) = P(V) \times P_V(G) + P\left(\overline{V}\right) \times P_{\overline{V}}(G) = 0,032 + 0,6p$$

et donc

$$p = \frac{0,2 - 0,032}{0,6} = \frac{0,168}{0,6} = 0,28.$$

La probabilité qu'une personne non vaccinée ait contracté la grippe est égale à $0,28$.

Partie B

1) n expériences identiques et indépendantes sont effectuées. Chaque expérience a deux issues à savoir « la personne est vaccinée contre la grippe » avec une probabilité $p = 0,4$ et « la personne n'est pas vaccinée contre la grippe » avec une probabilité $1 - p = 0,6$. La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,4$.

2) a) La probabilité demandée est $P(X = 15)$ avec $P(X = 15) = \binom{40}{15} 0,4^{15} 0,6^{25}$.

La calculatrice fournit $P(X = 15) = 0,123$ arrondi à 10^{-3}.

b) La probabilité demandée est $P(X \geqslant 20)$. La calculatrice fournit $P(X \geqslant 20) = 1 - P(X \leqslant 19) = 0,130$ arrondi à 10^{-3}.

3) La variable X suit approximativement la loi normale de paramètres $\mu = 1500$ (on note que $np = 3750 \times 0,4 = 1500$) et d'écart-type $\sigma = 30$ (on note que $\sqrt{np(1-p)} = 30$).

La probabilité demandée est $P\left(-\frac{50}{3} \leqslant X \leqslant \frac{50}{3}\right) = P(1450 \leqslant X \leqslant 1550)$.

La calculatrice fournit $P(1450 \leqslant X \leqslant 1550) = 0,904$ arrondi à 10^{-3}.

EXERCICE 3

Partie A - Etude d'un cas particulier

1) a) Dans le carré ADEH, les côtés consécutifs [AE] et [AD] sont perpendiculaires et donc les droites (AE) et (AD) sont orthogonales. De même, les droites (AE) et (AB) sont orthogonales. Ainsi, la droite (AE) est orthogonale aux droites (AD) et (AB) qui sont deux droites sécantes du plan (ABD). On en déduit que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABD), qui est aussi le plan (ABC), ou encore que la hauteur issue de E dans le tétraèdre ABCE est la droite (AE).

De même, la droite (BC) est perpendiculaire au plan (ABE) ou encore la hauteur issue de C dans le tétraèdre ABCE est la droite (BC).

b) La hauteur (AE) est contenue dans le plan (ADE) et la hauteur (BC) est contenue dans le plan (BCF). Les plans (ADE) et (BCF) sont strictement parallèles et donc, les plans (ADE) et (BCF) n'ont aucun point commun. En particulier, les hauteurs (AE) et (BC) ne sont pas concourantes.

2) a) Dans le repère considéré, le point A a pour coordonnées $(0, 0, 0)$, le point C a pour coordonnées $(1, 1, 0)$ et le point H a pour coordonnées $(0, 1, 1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ (qui ont les mêmes coordonnées que les points C et H respectivement) ne sont pas colinéaires ou encore les points A, C et H ne sont pas alignés. Ils définissent un unique plan.

$x_A - y_A + z_A = 0 - 0 + 0 = 0$. Donc, le point A appartient au plan d'équation $x - y + z = 0$.
$x_C - y_C + z_C = 1 - 1 + 0 = 0$. Donc, le point C appartient au plan d'équation $x - y + z = 0$.
$x_H - y_H + z_H = 0 - 1 + 1 = 0$. Donc, le point H appartient au plan d'équation $x - y + z = 0$.

Donc, le plan (ACH) est le plan d'équation $x - y + z = 0$.

b) En particulier, un vecteur normal au plan (ACH) est le vecteur de coordonnées $(1, -1, 1)$. D'autre part, le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$ et le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Donc, le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(1, -1, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}$ et donc le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (ACH) ou encore la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF est la droite (FD).

c) De même, la hauteur issue de A du tétraèdre ACHF est la droite (AG), la hauteur issue de C du tétraèdre ACHF est la droite (CE) et la hauteur issue de H du tétraèdre ACHF est la droite (BH).

Ainsi, les quatre hauteurs du tétraèdre ACFH sont donc les quatre grandes diagonales du cube. D'après le résultat admis par l'énoncé, ces quatre hauteurs sont concourantes.

Partie B

1) a) La droite (MK) est perpendiculaire au plan (NPQ) et donc la droite (MK) est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (MK) est orthogonale à la droite (PQ).

b) La droite (PQ) est orthogonale aux droites (MK) et (NK) qui sont deux droites sécantes du plan (MNK). Donc, la droite (PQ) est perpendiculaire au plan (MNK).

2) Puisque la droite (PQ) est perpendiculaire au plan (MNK), la droite (PQ) est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MN).

Partie C

Le vecteur $\overrightarrow{RS}$ a pour coordonnées $(4, -1, -4)$ et le vecteur $\overrightarrow{TU}$ a pour coordonnées $(0, 8, -2)$.

$$\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{TU} = 4 \times 0 + (-1) \times 8 + (-4) \times (-2) = -8 + 8 = 0.$$

Donc, les arêtes opposées [RS] et [TU] sont orthogonales.

Le vecteur $\overrightarrow{RT}$ a pour coordonnées $(7, -6, 3)$ et le vecteur $\overrightarrow{SU}$ a pour coordonnées $(3, 3, 5)$.

$$\overrightarrow{RT}.\overrightarrow{SU} = 7 \times 3 + (-6) \times 3 + 3 \times 5 = 21 - 18 + 15 = 18 \neq 0.$$

Donc, les arêtes opposées [RT] et [SU] ne sont pas orthogonales.

D'après la partie B, le tétraèdre RSTU n'est pas orthocentrique.

EXERCICE 4.

1) a) $\dfrac{3-i\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{2\times 2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

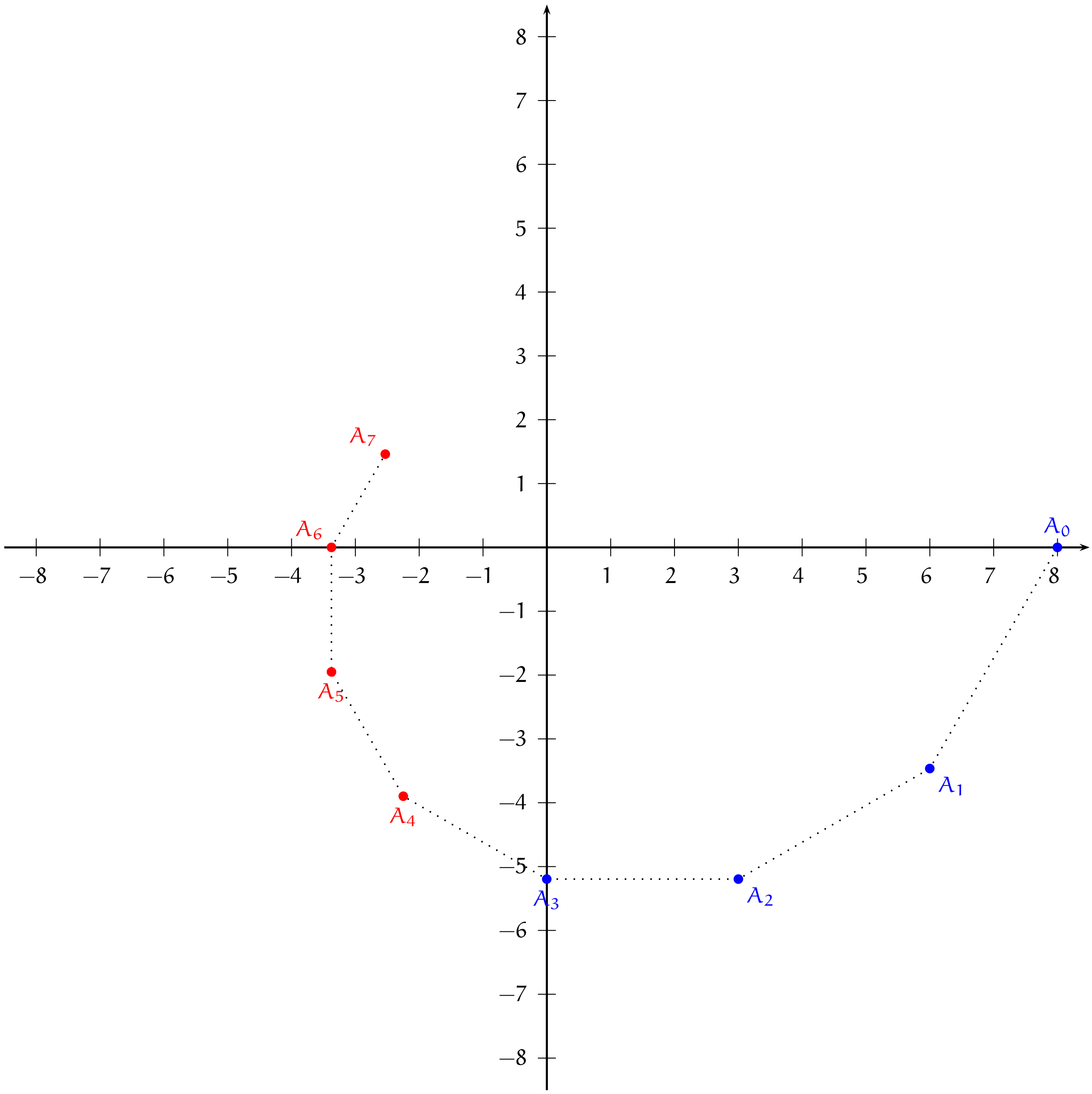
b) • $z_1=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{4}z_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\times 8=4\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

• $z_2=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{4}z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\times 4\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}=6e^{-i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)}=6e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

• $z_3=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{4}z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\times 6e^{-i\frac{\pi}{3}}=3\sqrt{3}e^{-i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)}=3\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}=3\sqrt{3}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=-3\sqrt{3}i$.

En particulier, z_3 est un imaginaire pur.

c)



2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel$n$, $z_n=8\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$.

• $8\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 e^{-i\frac{0\pi}{6}}=8=z_0$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n=0$.

• Soit $n\geqslant 0$. Supposons que $z_n=8\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$. Alors,

$$
\begin{aligned}
z_{n+1} &= \frac{3-i\sqrt{3}}{4} z_n \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}} \text{ (d'après 1)a) et par hypothèse de récurrence)} \\
&= 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{6}\right)} = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{6}}.
\end{aligned}
$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$.

b) Pour n entier naturel donné, $|u_n| = \left|8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right| \times \left|e^{-i\frac{n\pi}{6}}\right| = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite géométrique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Puisque $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3) a) Soit k un entier naturel.

$$
\begin{aligned}
\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}} &= \frac{\frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_k - z_k}{\frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_k} = \frac{\frac{3-i\sqrt{3}}{4}-1}{\frac{3-i\sqrt{3}}{4}} = \frac{3-i\sqrt{3}-4}{3-i\sqrt{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} \\
&= \frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)\left(3+i\sqrt{3}\right)}{\left(3-i\sqrt{3}\right)\left(3+i\sqrt{3}\right)} = \frac{-3-i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}+3}{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = -\frac{4i\sqrt{3}}{12} = -\frac{i\sqrt{3}}{3} = -\frac{i\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}i.
\end{aligned}
$$

En prenant le module des deux membres de l'égalité précédente, on obtient

$$
\frac{A_kA_{k+1}}{OA_{k+1}} = \frac{|z_{k+1}-z_k|}{|z_{k+1}|} = \left|\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}}\right| = \left|-\frac{1}{\sqrt{3}}i\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}
$$

et donc $A_kA_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}OA_{k+1}$.

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$
\begin{aligned}
A_0A_+A_1A_2+\ldots+A_{n-1}A_n &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(OA_1+OA_2+\ldots+OA_n\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(u_1+u_2+\ldots+u_n\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1 + 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \ldots + 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1+\ldots+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\right) \\
&= 4\times\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{2-\sqrt{3}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right).
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $\ell_n = \frac{8}{2-\sqrt{3}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$.

Puisque $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ (car $\sqrt{3}^2 < 2^2$), $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ et donc

$$
\lim_{n\to+\infty}\ell_n = \frac{8}{2-\sqrt{3}}.
$$

