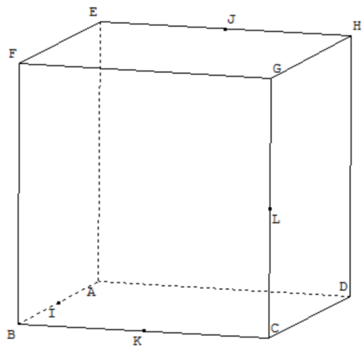
Baccalauréat Liban 2015 – Série S

Éléments de correction

Table des matières

Exercice 1



1a) Pour démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK) il suffit de montrer que le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK).

Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$, on a :

$$I\begin{pmatrix}0,5\\0\\0\end{pmatrix} \quad J\begin{pmatrix}0\\0,5\\1\end{pmatrix} \quad K\begin{pmatrix}1\\0,5\\0\end{pmatrix} \quad F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

On obtient facilement :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

On vérifie alors que les produits scalaires $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IK}$ sont nuls.

$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IJ}=0,5+0,5-1=0$

et

$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IK}=-0,5+0,5+\vec{0}=0$

La droite (FD) est donc bien orthogonale au plan (IJK).

1b) Le plan (IJK) admet, d'après la question précédente, $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Son équation cartésienne est donc de la forme $-x+y-z+d=0$ avec d à déterminer.

Puisque $I\begin{pmatrix}0,5\\0\\0\end{pmatrix}$ appartient au plan (IJK), ses coordonnées doivent vérifier l'équation du plan.

On obtient alors l'équation suivante : $-0,5+0-0+d=0$ soit $d=0,5$.

Finalement, $-x+y-z+0,5=0$ est une équation cartésienne de (IJK).

2) $N\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(FD) \Leftrightarrow \overrightarrow{FN}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$Il existe k $\in\mathbb{R}$tel que $\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{k\,FD}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-x_F=k.x_{\overrightarrow{FD}} \\ y-y_F=k.y_{\overrightarrow{FD}} \\ z-z_F=k.z_{\overrightarrow{FD}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x_F+k.x_{\overrightarrow{FD}} \\ y=y_F+k.y_{\overrightarrow{FD}} \\ z=z_F+k.z_{\overrightarrow{FD}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-k \\ y=k \\ z=1-k \end{cases}$$

3) Si le pont M appartient à la droite (FD) **<u>et</u>** au plan (IJK), ses coordonnées vérifient simultanément les équations obtenues aux questions 1b et 2.

Par substitution, on obtient l'équation d'inconnue k suivante :

$-(1-k)+k-(1-k)+0,5=0$

$\Leftrightarrow\ 3k-1,5=0$

$\Leftrightarrow\ k=0,5$

En remplaçant k par 0,5 dans l'équation de la droite (FD) obtenue à la question 2, on trouve

$$M\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0,5\end{pmatrix}$$

4) On vérifie facilement que le produit scalaire $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{IJ}$ est nul, le triangle IJK est donc rectangle en I.

Rappel : $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\1\end{pmatrix}$

La diagonale d'un carré de côté 1 vaut $\sqrt{2}$. D'après le théorème des milieux on a donc $IK=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $KJ=CH=\sqrt{2}$.

$$IJ=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Le triangle n'est pas isocèle.

Son aire $\mathscr{A}$ vaut $\mathscr{A} = \frac{IK\times IJ}{2}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ unités d'aire.

5) Le volume d'une pyramide est donné par $\frac{1}{3}\times(aire\ de\ la\ base)\times hauteur$.

Le tétraèdre FIJK admet (d'après les questions 1a et 3) FM pour hauteur associée à la base IJK.

Puisque $M\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0,5\end{pmatrix}$, on obtient $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\-0,5\end{pmatrix}$ et donc $FM=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le volume $\mathscr{V}$ de notre tétraèdre vaut donc : $\frac{1}{3}\times\mathscr{A}\times\mathscr{V} = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{8}$ unité de volume.

6) 1ère méthode : il suffit de montrer que (IJ) et (KL) ne sont coplanaires et non parallèles.

Pour cela, on peut montrer que L appartient au plan (IJK).

Les coordonnées de L sont $L\begin{pmatrix}1\\1\\0,5\end{pmatrix}$, elles vérifient l'équation de (IJK) : $-x+y-z+0,5=0$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0\\0,5\\0,5\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit, par élimination, que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes (elles sont coplanaires non parallèles).

2ème méthode :

La droite (IJ) admet pour équation paramétrique $\begin{cases} x=0,5-0,5t \\ y=\ 0,5t \\ z=\ t\end{cases}$, la droite (KL) : $\begin{cases} x=\ 1 \\ y=0,5+0,5t' \\ z=\ 0,5t'\end{cases}$

On résout le système

$$\begin{cases} 0,5-0,5t=1 \\ 0,5t=0,5+0,5t' \\ t=0,5t'\end{cases}.$$

On obtient un couple solution : $t=-1$ et $t'=-2$. Ce qui prouve que les droites sont sécantes

Remarque : cette méthode permet aussi de déterminer les coordonnées du point d'intersection

$$P\begin{pmatrix}1\\0,5\\-1\end{pmatrix}$$

Exercice 2

1) $\frac{1}{1+x}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=1+x>0$ sur [0;1].

Donc $\frac{1}{1+x}$ admet pour primitive $\ln(1+x)$.

On en déduit que $u_0=[\ln(1+x)]_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2$.

2a) $u_{n+1}+u_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}\mathrm{d}x \text{ (par linéarité de l'intégrale)}$$

$$=\int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$$

$$=[x^{n+1}]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

2b) D'après la relation établie au 2a, $u_1=\frac{1}{0+1}-u_0=1-\ln 2$.

3a)

Deux complétions sont possibles :

```
VARIABLES
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  u PREND_LA_VALEUR 1-log(2)
  //On initialise u avec la valeur u1
  POUR i ALLANT_DE 1 A n-1
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR 1/(i+1)-u
    FIN_POUR
  AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

```
VARIABLES
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  u PREND_LA_VALEUR log(2)
  //On initialise u avec la valeur u0
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR 1/((i-1)+1)-u
    //Donc u reçoit la valeur 1/i-u
    FIN_POUR
  AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

3b) On peut conjecturer que la suite semble décroissante, positive et avoir 0 pour limite.

4a) On étudie le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$.

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)}$$

$$=\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Or $x-1<0$ sur [0;1] donc $\frac{x^n(x-1)}{1+x}<0$ sur [0;1] et, par positivité de l'intégrale, $u_{n+1}-u_n<0$, ce qui prouve bien que (u_n) est décroissante.

4b) Pour tout n, u_n est positif comme intégrale d'une fonction positive sur [0;1].

La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0), elle est donc convergente vers une limite L.

5) Notons L la limite de la suite (u_n) .

On se rappelle de l'égalité établie au 2a : $u_{n+1}+u_n=\frac{1}{n+1}$.

Puisque la suite (u_n) admet une limite, on peut affirmer, par somme que le membre de gauche admet une limite.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}+u_n=2\,\mathrm{L}$.

Pour le membre de droite, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$.

Ce qui nous permet d'écrire, puisque les deux membres sont égaux pour tout n, 2L = 0. Et finalement L = 0.

Exercice 3

1) On pose $f(x)=\mathrm{e}^x$. On a alors $f'(x)=\mathrm{e}^x$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a pour équation :

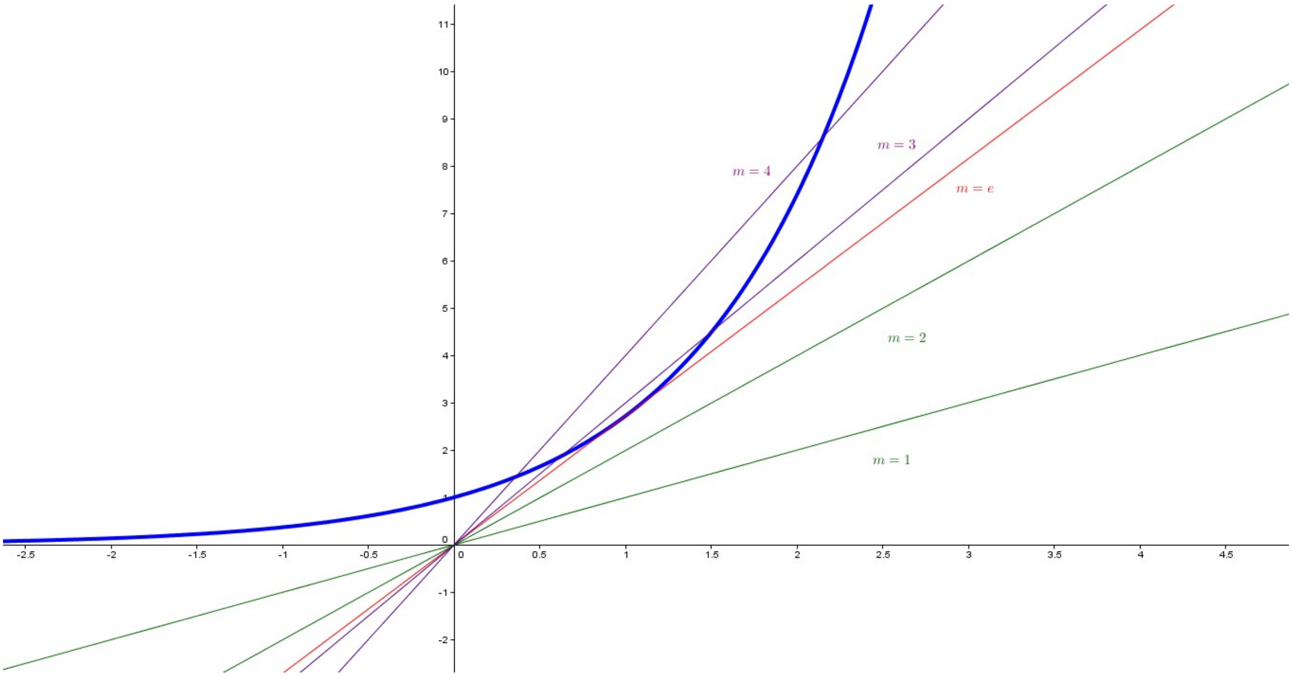
$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

soit $y=e\,x$

2) Sur l'écran de la calculatrice ou simplement avec une règle sur le graphique on peut faire les conjectures suivantes

- Si $m<\mathrm{e}$ il n'y a aucun point d'intersection.
- Si $m=\mathrm{e}$ il n'y a un point d'intersection.
- Si $m>\mathrm{e}$ il n'y a deux points d'intersection.

Ci-dessous une représentation de quelques unes des droites D_m .



3) Pour prouver cette conjecture, je vais considérer la fonction $g(x)=\mathrm{e}^x-mx$.

Cette fonction s'annule en *x* si et seulement si la courbe $\mathscr{C}$ et la droite D_m se coupent au point d'abscisse *x*. Donc pour trouver le nombre de points d'intersection de la droite et de la courbe il suffit de trouver le nombre de valeurs de *x* pour lesquelles *g* s'annule.

Étudions la fonction *g*.

Limites :

- en +∞ la limite vaut +∞ d'après les théorèmes de croissance comparée.
- en –∞ la limite vaut +∞ par somme.

Variations :

$$g'(x)=\mathrm{e}^x-m$$

On étudie le signe de g' .

$g'(x)>0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x-m>0$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^x>m$

$\Leftrightarrow x>\ln(m)$.

Extremum : atteint en $\ln(m)$, il vaut $\mathrm{e}^{\ln(m)}-m\ln(m)=m-m\ln(m)$ (c'est un minimum).

Résumons :

x	$-\infty$		$\ln(m)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m(1-\ln(m))$	$\nearrow$	$+\infty$

Rappelons-nous que notre but est de savoir combien de fois la fonction *g* s'annule.
Pour cela, intéressons-nous au signe du minimum $m(1-\ln(m))$
Compte tenu du tableau de variations,

- si ce minimum est positif, *g* ne s'annule jamais,
- si ce minimum est nul, *g* s'annule exactement une fois,
- si ce minimum est négatif, *g* s'annule exactement deux fois.

Or m est positif, le signe de $m(1-\ln(m))$ dépend donc uniquement de celui de $1-\ln(m)$.

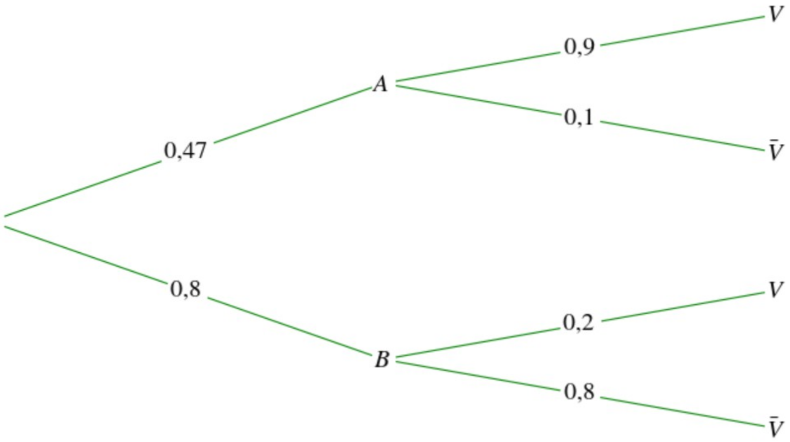
$$1-\ln(m)>0 \Leftrightarrow \ln(m)<1 \Leftrightarrow m<\mathrm{e}^1$$

Conclusion : nos conjectures sont démontrées, comme le prouve le tableau ci-dessous

	Le minimum $m(1-\ln(m))$ ...	La fonction *g*...	La courbe et la droite...
Si $m<\mathrm{e}$	… est positif	...ne s'annule jamais	...ne s'intersectent pas.
Si $m=\mathrm{e}$	… est nul	...s'annule une seule fois	...s'intersectent en un point.
Si $m>\mathrm{e}$	… est négatif	...s'annule deux fois	...s'intersectent en 2 points.

Exercice 4 (obligatoire)

1)



2a) D'après l'arbre, on a $p(\mathrm{V})=0{,}47\times 0{,}9+0{,}53\times 0{,}8=0{,}847$.

2b) $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{A})=\dfrac{p(\mathrm{V}\cap\mathrm{A})}{p(\mathrm{V})}=\dfrac{0{,}47\times 0{,}9}{0{,}847}=0{,}499$.

3) Voter pour le candidat A revient à

- déclarer vouloir voter pour A et dire la vérité

ou

- déclarer vouloir voter pour B et mentir.

On a donc $p=0{,}47\times 0{,}9+0{,}53+0{,}2=0{,}529$.

4) Dans l'échantillon, on peut penser (si on fait abstraction de la mention « estimation après redressement ») que la fréquence observée d'électeurs voulant voter pour le candidat A est de f = 52,9%.

Calculons l'intervalle de confiance lié à ce sondage (les conditions n > 30, $nf>5$ et $n(1-f)>5$ sont bien vérifiées).

$$\mathrm{I}=\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\mathrm{I}=[0{,}5001;0{,}5579] .$$

Au seuil de confiance de 95%, le candidat A peut donc croire en sa victoire, puisque la proportion réelle d'électeur voulant voter pour lui est estimée appartenir (au seuil de confiance de 95%) à un intervalle tout entier situé au-dessus de 50%.

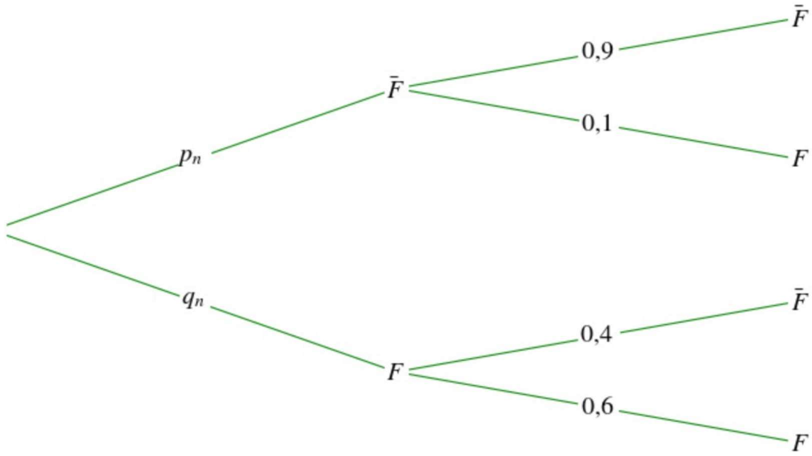
5) On peut estimer avoir 4 personnes en moyenne qui acceptent de répondre au sondage. On peut donc estimer que 150 heures seront nécessaires pour obtenir 1200 réponses.

Exercice 4 (spécialité)

1) Puisque $q_0=1$ on se place dans le cas où notre sujet a fumé le jour où il a décidé d'arrêter.

Au premier jour après sa décision, il a donc une probabilité $q_1=0{,}6$ de fumer et $p_1=0{,}4$ de ne pas fumer.

2) On a l'arbre suivant :



donc $p_{n+1}=0{,}9\,p_n+0{,}4\,q_n$ et $q_{n+1}=0{,}1\,p_n+0{,}6\,q_n$.

D'où les formules

- En B3 : « = 0,9×B2+0,4×C2 »
- En C3 : « =0,1×B2+0,6×C2 »

3a) La vérification est immédiate (en notant que $0{,}5\,B=\begin{pmatrix}0{,}1 & -0{,}4\\ -0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix}$)

3b) Là encore les vérifications sont immédiates.

Il faut bien calculer A×B et B×A séparément.

3c) Par récurrence sur n.

Montrons que, pour tout n entier naturel, $\mathrm{M}^n=\mathrm{A}+0{,}5^n\,\mathrm{B}$.

Initialisation : pour n = 0

$\mathrm{M}^0=\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}+0{,}5^0\,\mathrm{B}=\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{I}$ donc la propriété est initialisée pour n = 0.

Hérédité : supposons que la propriété soit vraie pour un n entier (on a donc $\mathrm{M}^n=\mathrm{A}+0{,}5^n\,\mathrm{B}$)

Démontrons qu'elle est vraie au rang n + 1 (on veut donc montrer que $\mathrm{M}^{n+1}=\mathrm{A}+0{,}5^{n+1}\,\mathrm{B}$).

$\mathrm{M}^{n+1}=\mathrm{M}\mathrm{M}^n$

$=\mathrm{M}(\mathrm{A}+0{,}5^n\,\mathrm{B})$ (d'après notre hypothèse de récurrence)

$=(\mathrm{A}+0{,}5\,\mathrm{B})(\mathrm{A}+0{,}5^n\,\mathrm{B})$ d'après le 3a

$=\mathrm{A}^2+0{,}5^n\,\mathrm{A}\times\mathrm{B}+0{,}5\,\mathrm{B}\times\mathrm{A}+0{,}5^{n+1}\,\mathrm{B}^2$ en développant

$=\mathrm{A}+0+0+0{,}5^{n+1}\,\mathrm{B}$ (puisque $\mathrm{A}^2=\mathrm{A}$, $\mathrm{B}^2=\mathrm{B}$ et que $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\mathrm{B}\times\mathrm{A}=0$).

$=\mathrm{A}+0{,}5^{n+1}\,\mathrm{B}$ ce qui démontre l'hérédité.

La propriété est donc vraie pour tout n entier naturel.

3d) On a admis que $X_n = M^n \times X_0$.

Or $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$, $M^n = A + 0,5^n B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + 0,5^n \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On obtient par produit et somme de matrice, on obtient $X_n = \begin{pmatrix} 0,8 - 0,8 \times 0,5^n \\ .... \end{pmatrix}$ d'où la relation demandée.

3e) A long terme, la probabilité que notre sujet fume va se stabiliser autour de 0,8, ce qui ne permet pas d'affirmer avec certitude qu'il arrêtera de fumer même si la probabilité est élevée.