BACCALAUREAT BLANC GENERAL

MARDI 13 JANVIER 2015

de 8h à 12h

MATHEMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

VOUS REDIGEREZ CHAQUE EXERCICE SUR DES FEUILLES DIFFERENTES

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie.
le candidat est invité à faire figurer sur sa copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5

EXERCICE 1 **4 points**

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a $2\,\%$ de la population contaminée par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'événement «la personne est contaminée par le virus» et T l'événement «le test est positif».

$\overline{\mathrm{V}}$ et $\overline{\mathrm{T}}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1. a) Préciser les valeurs des probabilités $p(\mathrm{V})$, $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{T})$, $\mathrm{P}_{(\overline{\mathrm{V}})}(\overline{\mathrm{T}})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   b) En déduire la probabilité de l'événement $\mathrm{V} \cap \mathrm{T}$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.
3. a) Justifier par un calcul la phrase : «Si le test est positif, il n'y a qu'environ $40\,\%$ de «chances» que la personne soit contaminée».
   b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Partie B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

EXERCICE 2 **5 points**

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}25\,u_n + 1{,}5 \times (0{,}4)^n$

1. a) Vérifier que $u_1 = 2{,}75$ puis à l'aide de votre calculatrice, compléter le tableau donné en annexe des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-3} près.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	5	2,75	1,287	0,562	0,236	0,097	0,040		

b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2 \times (0{,}4)^n$.
   b) On admet que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$
   Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10\times(0{,}4)^n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}25$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

b) En déduire, que pour tout entier naturel n, $u_n = -5\times(0{,}25)^n + 10\times(0{,}4)^n$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2), et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0{,}001$

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0 u prend la valeur 5	
Traitement :	Tant que …..	(1)
	n prend la valeur ….	(2)
	u prend la valeur ….	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

EXERCICE 3 **6 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x e^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variation de g.
4. a) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $[0;+\infty[$ une unique solution.
   On note α cette solution.
   b) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   c) Justifier que $\mathrm{e}^{\alpha}+1 = \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha}$
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeur de x.

Partie B

Soit A la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\mathrm{A}(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x+1}$

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $\mathrm{A}'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie A.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0;+\infty[$ (les limites de A ne sont pas attendus).

Partie C

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

La figure est donnée en annexe.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de C de coordonnées $(x;f(x))$, P le point de coordonnées $(x;0)$, et Q le point de coordonnées $(0;f(x))$.

Déterminer l'abscisse de M pour laquelle l'aire du rectangle OPMQ est maximale.

EXERCICE 4 5 points

Les quatre questions sont indépendantes. Les trois premières questions sont notées chacune sur 1 point et la question 4 est notée sur 2 points.

Pour chaque question, une affirmation est proposée.Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Une réponse qui n'est pas justifiée ne sera pas prise en compte. Toute justification incomplète sera valorisée.

Dans les questions 1 et 2 le plan est rapporté au repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

1. Affirmation 1 : Le point A d'affixe $a=-3-i$, le point B d'affixe $b=2i$ et le point C d'affixe $c=\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})i$ sont alignés.

2. Affirmation 2 : Si un point M, d'affixe z non égale à i, est un point de l'axe imaginaire, alors le point P d'affixe $\dfrac{z}{(z-i)}$ est un point de l'axe réel.

3. Affirmation 3 : Dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z-\overline{z}+1-3i=0$ admet une solution unique.

4. Affirmation 4 : La courbe représentant la fonction exponentielle admet une unique tangente passant par l'origine du repère.

ANNEXE

NOM : Prénom : Classe :

<u>EXERCICE 2</u>

Question 1. a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	5	2,75	1,29	0,56	0,24	0,1	0,04		

<u>EXERCICE 3</u>

<u>Partie C</u>