Maths

Terminale Scientifique

TS1&2&3
OBLIGATOIRE
&
SPÉCIALITÉ

Correction Bac Blanc

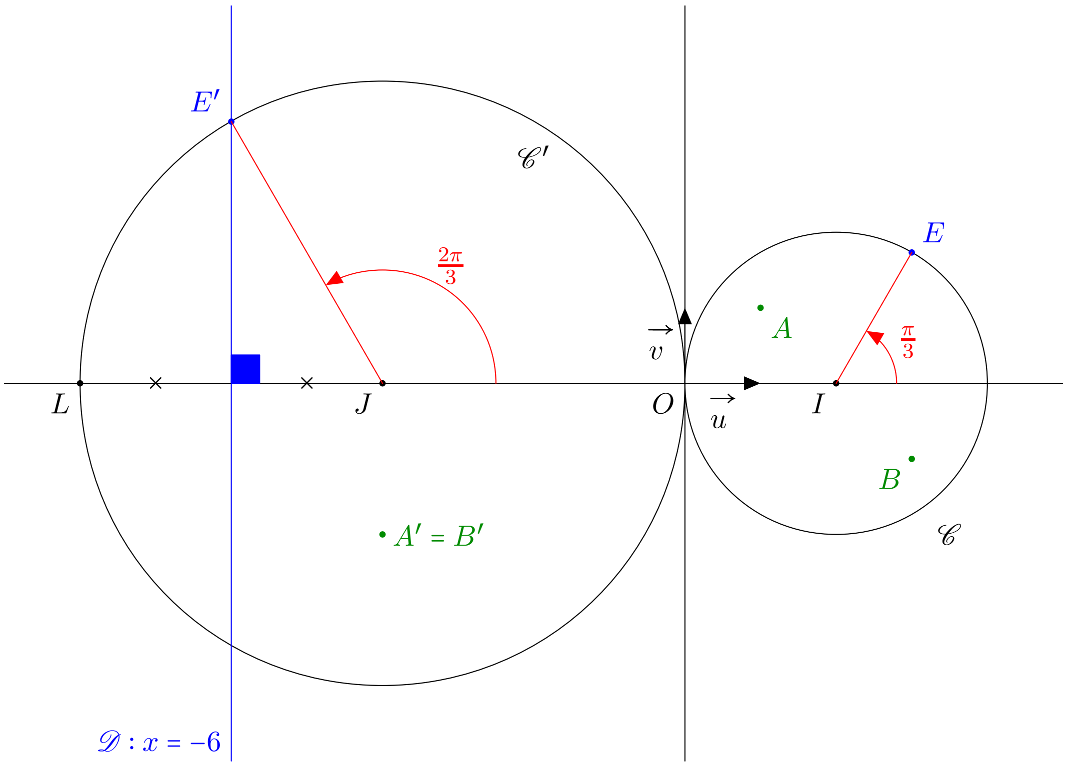
Lycée René Cassin, Gonesse (Val d'Oise, France métropolitaine)

Exercice 1. Métropole juin 2008 **Commun à tous les candidats**

Remarque : Pour ne pas alourdir la rédaction, je confondrai les angles avec leurs mesures.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).
Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1+\mathrm{i}$, $3-\mathrm{i}$ et 2.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M' est appelé l'image de M.

1. Faire une figure sur une feuille de papier millimétré et compléter cette figure tout au long de l'exercice.



2. Calculer les affixes des points A' et B', images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?

$z_{A'} = z'_A = z_A^2 - 4z_A = (1+\mathrm{i})^2 - 4(1+\mathrm{i}) = 1^2 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 - 4 - 4\mathrm{i} = 1 + 2\mathrm{i} - 1 - 4 - 4\mathrm{i} = -4 - 2\mathrm{i}$

$z_{B'} = z'_B = z_B^2 - 4z_B = (3-\mathrm{i})^2 - 4(3-\mathrm{i}) = 3^2 - 2\times 3\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 - 12 + 4\mathrm{i} = 9 - 6\mathrm{i} - 1 - 12 + 4\mathrm{i} = -4 - 2\mathrm{i}$

On remarque que les points A et B ont la même image : ils sont donc confondus dans le plan.

3. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe −5.

On cherche les points M d'affixe z tels que $z' = -5$ ie $z^2 - 4z = -5$ ie $z^2 - 4z + 5 = 0$.
Déterminons donc les racines complexes du polynômes du second degré $z^2 - 4z + 5$:
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 = (2\mathrm{i})^2 < 0$
Donc le polynôme $z^2 - 4z + 5$ a deux racines complexes conjuguées :
$z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{4 - 2i}{2} = \dfrac{2(2-\mathrm{i})}{2} = 2 - \mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2 + \mathrm{i}$
$S = \{2 - \mathrm{i}; 2 + \mathrm{i}\}$: les points du plan ayant pour image le point d'affixe 5 sont les deux points d'affixes $2 - \mathrm{i}$ et $2 + \mathrm{i}$.

4. **a.** Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = (z-2)^2$.

$(z-2)^2 = z^2 - 4z + 4 = z' + 4$

b. En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ et, lorsque z est différent de 2, une relation entre $\arg(z'+4)$ et $\arg(z-2)$.

On vient de montrer que pour tout complexe :$z' + 4 = (z-2)^2$, ainsi $z - 2 = 0 \iff z' + 4 = 0$ et $z = 2 \iff z' = -4$.

$$z' + 4 = (z-2)^2 \implies \begin{cases} |z'+4| = \left|(z-2)^2\right| \\ \arg(z'+4) = \arg\left((z-2)^2\right)\ [2\pi] \text{ pour } z \neq 2 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} |z'+4| = |z-2|^2 \\ \arg(z'+4) = 2\arg(z-2)\ [2\pi] \text{ pour } z \neq 2 \end{cases}$$

c. Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2 ?

$|z'+4| = |z-2|^2$ ie $|z' - (-4)| = |z-2|^2$ se traduit géométriquement par $JM' = IM^2$ pour J d'affixe -4.
Ainsi, sachant que les distances sont positives, $M \in \mathscr{C} \iff IM = 2 \iff JM' = 4 \iff M' \in \mathscr{C}'$ où $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre J et de rayon 4.
Pour $z \neq 2$ ie $M \neq I$, ce qui est le cas ici pour $M \in \mathscr{C}$, $\arg(z'+4) = 2\arg(z-2)\ [2\pi]$ ie $\arg(z' - (-4)) = 2\arg(z-2)\ [2\pi]$ qui se traduit géométriquement par $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{JM'}\right) = 2\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{IM}\right)\ [2\pi]$.
Quand M parcourt $\mathscr{C}$, $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{IM}\right)$ prend toutes les valeurs de l'intervalle $[0; 2\pi[$, et ainsi $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{JM'}\right)$ prend toutes les valeurs de l'intervalle $[0; 4\pi[$.
En définitive, lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$, M' décrit le cercle $\mathscr{C}'$, cercle de centre J et de rayon 4.

5. Soient E le point d'affixe $2 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe -4 et E' l'image de E.

a. Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{IE}\right)$.

$IE = |z_E - z_I| = \left|2 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} - 2\right| = \left|2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = |2|\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = 2 \times 1 = 2$
Modulo 2π : $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{IE}\right) = \arg(z_E - z_I) = \arg\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right) = \arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

b. Calculer la distance JE' et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{JE'}\right)$.

En utilisant la relation sur les modules de **4.b.** et la longueur trouvée en **5.a.** :
$JE' = |z_{E'} - z_J| = |z'_E - (-4)| = |z'_E + 4| = |z_E - 2|^2 = |z_E - z_I|^2 = IE^2 = 2^2 = 4$
En utilisant la relation sur les arguments de **4.b.** et la mesure d'angle trouvée en **5.a.**, modulo 2π :
$\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{JE'}\right) = \arg(z_{E'} - z_J) = \arg(z'_E + 4) = 2\arg(z_E - 2) = 2\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{IE}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$

Remarque : On peut aussi calculer $z_{E'}$ et faire les calculs comme à la question précédente.

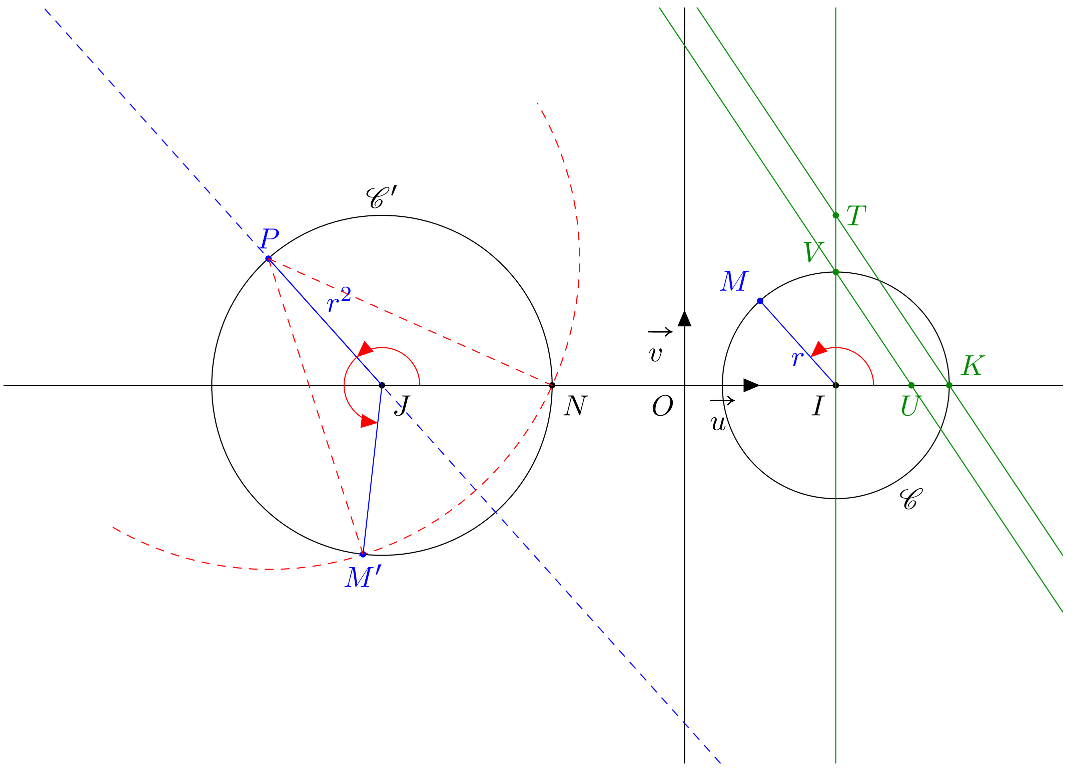
c. Construire à la règle et au compas le point E' ; on laissera apparents les traits de construction.

E' appartient à $\mathscr{C}'$ (car $JE' = 4$).
De plus $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{JE'}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, donc E' est sur la médiatrice du segment $[JL]$ où L est le point du cercle $\mathscr{C}'$ qui se trouve aussi sur l'axe des réels sans être le point O : cette médiatrice est la droite verticale, notée $\mathscr{D}$, d'équation $x = -6$.
En définitive E' est le point d'intersection entre le cercle $\mathscr{C}'$ et la droite $\mathscr{D}$ dans le demi-plan complexe de partie imaginaire positive.

Remarque : Une autre méthode de construction plus générale pour construire l'image de tout point M d'affixe différent de 2, c'est-à-dire M distinct du point I.
On conserve les points I et J d'affixes respectives 2 et -4.
Cette méthode de construction repose sur les relations établies à la question **4.b.** et leurs interprétations géométriques (expliquées en **4.c.**) : $JM' = IM^2$ et $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{JM'}\right) = 2\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{IM}\right)\ [2\pi]$.
Traçons le cercle, noté $\mathscr{C}$, de centre I qui passe par M ; notons r son rayon : $r = IM$.
Traçons le cercle $\mathscr{C}'$ de centre J et de rayon r^2. Pour obtenir un segment de longueur r^2 à partir d'un segment de longueur r, on utilise le théorème de Thalès :

- Notons K le point d'affixe $2+r$ (le point d'intersection « le plus à droite » - celui dont l'affixe a la partie réelle la plus grande - entre $\mathscr{C}$ et la droite des réels), et U le point d'affixe 3.
- Traçons la droite perpendiculaire à l'axe des réels qui passe par I, notons V le point d'affixe $2+r\times\mathrm{i}$, et traçons la droite (UV).
- Traçons la droite Δ parallèle à (UV) qui passe par K.
- Notons T le point d'intersection entre Δ et (IV).
- Le segment $[IT]$ a pour longueur r^2.

Plaçons ensuite le point P du cercle $\mathscr{C}'$ tel que $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{JP}\right) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{IM}\right)$: pour cela traçons la droite parallèle à la droite (IM) qui passe par J, P sera le point d'intersection de cette parallèle avec le cercle $\mathscr{C}'$ dans le même demi-espace de frontière l'axe des réels que le point M.
Pour finir, on place le point M' sur le cercle $\mathscr{C}'$ tel que $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{JM'}\right) = 2\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{JP}\right)$: pour cela, on place le point N d'affixe $-4+r^2$ (le point d'intersection « le plus à droite » - celui dont l'affixe a la partie réelle la plus grande - entre $\mathscr{C}'$ et la droite des réels), puis on trace le cercle de centre P qui passe par N, alors M' est le point différent de N d'intersection entre ce nouveau cercle et le cercle $\mathscr{C}'$.
Toute cette construction se fait au compas et à la règle non graduée à l'aide de l'unité de longueur du repère orthonormé.



Exercice 2. Asie juin 2013 **Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie A

On considère la suite (w_n) définie par : $w_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $\quad w_{n+1} = \dfrac{1+3w_n}{3+w_n}$.
On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $w_n > 1$.

Notons, pour tout entier $n \geqslant 0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $w_n > 1$.

- **Initialisation** : pour $n = 0$, $w_0 = 2$ donc $w_0 > 1$, ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit un entier $n \geqslant 0$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie ie $w_n > 1$.
  Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie ie $w_{n+1} > 1$ ie $w_{n+1} - 1 > 0$.
  On a :
  $$w_{n+1} - 1 = \frac{1+3w_n}{3+w_n} - 1 = \frac{1+3w_n}{3+w_n} - \frac{3+w_n}{3+w_n} = \frac{1+3w_n-3-w_n}{3+w_n} = \frac{2w_n-2}{3+w_n} = \frac{2(w_n-1)}{3+w_n}$$
  Or $w_n > 1 \Longrightarrow \begin{cases} w_n - 1 > 0 \\ 3 + w_n > 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2(w_n-1) > 0 \\ 3 + w_n > 0 \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{2(w_n-1)}{3+w_n} > 0$ ie $w_{n+1} - 1 > 0$
  Ainsi $w_{n+1} > 1$: la propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion** : On a montré par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $w_n > 1$.

Remarque : On aurait pu aussi montrer l'hérédité ainsi : $w_n > 1 \Longrightarrow \begin{cases} 3 + w_n > 4 \\ 2w_n > 2 \end{cases} \Longrightarrow$
$\begin{cases} 3 + w_n > 0 \\ 3w_n - w_n > 3 - 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3 + w_n > 0 \\ 1 + 3w_n > 3 + w_n \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{1+3w_n}{3+w_n} > \dfrac{3+w_n}{3+w_n} \Longrightarrow \dfrac{1+3w_n}{3+w_n} > 1$ ie $w_{n+1} > 1$

2. On admet que, pour tout entier naturel n, on a : $w_{n+1} - w_n = \dfrac{(1-w_n)(1+w_n)}{3+w_n}$.

a. Déterminer le sens de variation de la suite (w_n).

On a démontré que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n > 1$.
$$w_n > 1 \Longrightarrow \begin{cases} -w_n < -1 \\ 1 + w_n > 2 \\ 3 + w_n > 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 - w_n < 0 \\ 1 + w_n > 0 \\ 3 + w_n > 0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{(1-w_n)(1+w_n)}{3+w_n} < 0 \Longrightarrow w_{n+1} - w_n < 0 \Longrightarrow$$
$w_{n+1} < w_n$
Donc la suite (w_n) est strictement décroissante.

b. En déduire que la suite (w_n) converge.

La suite (w_n) est strictement décroissante et minorée par 1 (car, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n > 1$), donc la suite (w_n) converge vers une limite supérieure ou égale à 1.

Remarque : Démonstration de : pour tout entier naturel n, $w_{n+1} - w_n = \dfrac{(1-w_n)(1+w_n)}{3+w_n}$.
$$w_{n+1} - w_n = \frac{1+3w_n}{3+w_n} - w_n = \frac{1+3w_n}{3+w_n} - \frac{(3+w_n)w_n}{3+w_n} = \frac{1+3w_n-3w_n-w_n^2}{3+w_n} = \frac{1^2-w_n^2}{3+w_n} = \frac{(1-w_n)(1+w_n)}{3+w_n}$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n : $\quad u_{n+1} = \dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$.
On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u	**0,8**	**1,077**	**0,976**

Au départ, u vaut 2.

Quand $i = 1$, $u = \dfrac{1+0,5\times 2}{0,5+2} = \dfrac{2}{2,5} = \dfrac{4}{5} = 0,8$.

Quand $i = 2$, $u = \dfrac{1+0,5\times 0,8}{0,5+0,8} = \dfrac{1,4}{1,3} = \dfrac{14}{13} \simeq 1,077$.

Quand $i = 3$, $u = \dfrac{1+0,5\times \frac{14}{13}}{0,5+\frac{14}{13}} = \dfrac{\frac{40}{26}}{\frac{41}{26}} = \dfrac{40}{41} \simeq 0,976$.

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

Les valeurs successives de u dans l'algorithme sont les valeurs de la suite (u_n). À partir des valeurs du tableau, on conjecture que la suite (u_n) converge (vers 1 ou une valeur proche de 1).

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

Remarque : Par une récurrence rapide, on montre que $u_n > 0$, justifiant l'existence de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}-1}{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}+1} = \frac{\frac{1+0,5u_n-0,5-u_n}{0,5+u_n}}{\frac{1+0,5u_n+0,5+u_n}{0,5+u_n}} = \frac{0,5-0,5u_n}{1,5+1,5u_n} = \frac{-0,5}{1,5}\times\frac{u_n-1}{u_n+1} = \frac{-1}{3}\times v_n.$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

$v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$

Comme la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$, on en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$v_n = v_0 \times q^n = \dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n \quad \left(= -\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{n+1}\right)$.

4. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

On a les équivalences suivantes : $v_n = 1 \iff \dfrac{u_n-1}{u_n+1} = 1 \iff u_n - 1 = u_n + 1 \iff -1 = 1$ qui est faux.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

Au préalable, on note que $v_n \neq 1 \Longrightarrow 1 - v_n \neq 0$, permettant la division par l'expression $1 - v_n$.

$v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1} \iff v_n(u_n+1) = u_n - 1 \iff v_nu_n + v_n = u_n - 1 \iff v_nu_n - u_n = -1 - v_n \iff$
$u_n(v_n-1) = -(1+v_n) \iff u_n = -\dfrac{1+v_n}{v_n-1} \iff u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$

Autre rédaction du fait qu'on vous donne la réponse :

$$\frac{1+v_n}{1-v_n} = \frac{1+\frac{u_n-1}{u_n+1}}{1-\frac{u_n-1}{u_n+1}} = \frac{\frac{u_n+1}{u_n+1}+\frac{u_n-1}{u_n+1}}{\frac{u_n+1}{u_n+1}-\frac{u_n-1}{u_n+1}} = \frac{\frac{u_n+1+u_n-1}{u_n+1}}{\frac{u_n+1-u_n+1}{u_n+1}} = \frac{2u_n}{2} = u_n$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$, raison comprise donc strictement entre -1 et 1, ainsi, la suite (v_n) converge vers 0.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+0}{1-0} = 1$.

Exercice 2. Création — Candidats suivant la spécialité Mathématiques

À 8 heures du matin, un 1er Avril, six adolescents blagueurs diffusent sur les réseaux sociaux une histoire drôle.
On a observé que le nombre de personnes informées de cette histoire augmente rapidement heure après heure.
Ainsi à 9 heures de ce 1er Avril, on dénombrait 3 adultes et 33 adolescents informés de l'histoire.
1 heure après, on dénombrait 21 adultes et 171 adolescents informés de l'histoire.
1 heures après encore, on dénombrait 984 personnes dont 117 adultes informées.

Pour chaque entier naturel n, on note a_n le nombre d'adultes informés de l'histoire à l'instant $(8+n)$ heures et b_n le nombre d'adolescents informés de l'histoire au même instant.

Une étude mathématique a permis de montrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ vérifient les relations :
$a_0 = 0$; $b_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{3a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \dfrac{-7a_n + 11b_n}{2}$.

On note A la matrice $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $X_{n+1} = A\cdot X_n$ et $X_n = A^n \cdot X_0$.

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ A\cdot X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\times a_n + \frac{1}{2}\times b_n \\ -\frac{7}{2}\times a_n + \frac{11}{2}\times b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Montrons, maintenant, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $X_n = A^n \cdot X_0$.
Notons, pour tout entier $n \geqslant 0$, la propriété $\mathcal{R}(n)$: $X_n = A^n \cdot X_0$.

- **Initialisation** : pour $n = 0$, $A^0 \cdot X_0 = I_2 \cdot X_0 = X_0$ ainsi $\mathcal{R}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit un entier $n \geqslant 0$.
  Supposons $\mathcal{R}(n)$ vraie ie $X_n = A^n \cdot X_0$.
  Montrons que $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie ie $X_{n+1} = A^{n+1}\cdot X_0$.
  On a, en utilisant la relation entre X_{n+1} et X_n, puis l'hypothèse de récurrence :
  $X_{n+1} = A\cdot X_n = A\cdot A^n \cdot X_0 = A^{n+1}\cdot X_0$: la propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion** : On a montré par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $X_n = A^n \cdot X_0$.

2. On note Q la matrice définie par : $Q = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a. Justifier que Q est inversible et donner sa matrice inverse Q^{-1}.

En notant $Q = (q_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant 2, 1\leqslant j\leqslant 2} = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,1} & q_{2,2} \end{pmatrix}$, Q est inversible si et seulement si son déterminant est non nul ie $q_{1,1}q_{2,2} - q_{2,1}q_{1,2} \neq 0$.

$det\,(Q) = q_{1,1}q_{2,2} - q_{2,1}q_{1,2} = \dfrac{7}{6}\times\dfrac{1}{6} - \left(-\dfrac{1}{6}\right)\times\left(-\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{7}{36} - \dfrac{1}{36} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6} \neq 0$

Ainsi la matrice Q est inversible et sa matrice inverse est :

$$Q^{-1} = \frac{1}{q_{1,1}q_{2,2} - q_{2,1}q_{1,2}} \begin{pmatrix} q_{2,2} & -q_{1,2} \\ -q_{2,1} & q_{1,1} \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

b. Sur la copie, détailler les calculs donnant le produit : $Q\cdot A$.

$$Q\cdot A = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6}\times\frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{6}\right)\times\left(-\frac{7}{2}\right) & \frac{7}{6}\times\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{6}\right)\times\frac{11}{2} \\ \left(-\frac{1}{6}\right)\times\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\times\left(-\frac{7}{2}\right) & \left(-\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\times\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{21}{12}+\frac{7}{12} & \frac{7}{12}-\frac{11}{12} \\ -\frac{3}{12}-\frac{7}{12} & -\frac{1}{12}+\frac{11}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{12} & -\frac{4}{12} \\ -\frac{10}{12} & \frac{10}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

c. Sachant que ce produit est égal au produit $D \cdot Q$ où D est la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, démontrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $A^n = Q^{-1} \cdot D^n \cdot Q$.

Notons, pour tout entier $n \geqslant 1$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $A^n = Q^{-1} \cdot D^n \cdot Q$.

- **Initialisation** : pour $n = 1$, sachant que l'énoncé nous dit que $Q \cdot A = D \cdot Q$ et ayant montré l'existence de Q^{-1} :
  $Q \cdot A = D \cdot Q \Longrightarrow Q^{-1} \cdot Q \cdot A = Q^{-1} \cdot D \cdot Q \Longrightarrow \left(Q^{-1} \cdot Q\right) \cdot A = Q^{-1} \cdot D \cdot Q \Longrightarrow I_2 \cdot A = Q^{-1} \cdot D \cdot Q \Longrightarrow$ $A^1 = Q^{-1} \cdot D^1 \cdot Q$ ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

  Remarque : Vérification que $Q \cdot A = D \cdot Q$:
  $$D \cdot Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times \frac{7}{6} + 0 \times \left(-\frac{1}{6}\right) & 2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) + 0 \times \frac{1}{6} \\ 0 \times \frac{7}{6} + 5 \times \left(-\frac{1}{6}\right) & 0 \times \left(-\frac{1}{6}\right) + 5 \times \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} = Q \cdot A$$

- **Hérédité** : Soit un entier $n \geqslant 1$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie ie $A^n = Q^{-1} \cdot D^n \cdot Q$.
  Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie ie $A^{n+1} = Q^{-1} \cdot D^{n+1} \cdot Q$.
  On a, en utilisant l'hypothèse de récurrence et l'initialisation au rang 1 :
  $A^{n+1} = A^1 \cdot A^n = Q^{-1} \cdot D^1 \cdot Q \cdot Q^{-1} \cdot D^n \cdot Q = Q^{-1} \cdot D^1 \cdot I_2 \cdot D^n \cdot Q = Q^{-1} \cdot D^1 \cdot D^n \cdot Q = Q^{-1} \cdot D^{n+1} \cdot Q$
  Ainsi $A^{n+1} = Q^{-1} \cdot D^{n+1} \cdot Q$: la propriété est donc héréditaire.

- **Conclusion** : On a montré par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = Q^{-1} \cdot D^n \cdot Q$.

  Remarque : La propriété est aussi vraie pour $n = 0$ de façon triviale (on obtient I_2 de chaque côté de l'égalité matricielle). On aurait d'ailleurs pu montrer la propriété par récurrence à partir de $n = 0$, mais comme on l'a vu dans l'hérédité, on aurait du vérifier la propriété au rang 1 pour passer du rang n au rang $n+1$.

3. Tous calculs faits, on montre que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, A^n est égale à $\begin{pmatrix} \frac{7 \times 2^n - 5^n}{6} & \frac{5^n - 2^n}{6} \\ \frac{7 \times 2^n - 7 \times 5^n}{6} & \frac{7 \times 5^n - 2^n}{6} \end{pmatrix}$

***(ce que l'on ne demande pas de justifier)*.**

a. Calculer le nombre de personnes informées de l'histoire 10 heures après sa diffusion.

D'après la question **1.** et la relation donnée au **3.** :

$$X_{10} = A^{10} \cdot X_0 = \begin{pmatrix} \frac{7 \times 2^{10} - 5^{10}}{6} & \frac{5^{10} - 2^{10}}{6} \\ \frac{7 \times 2^{10} - 7 \times 5^{10}}{6} & \frac{7 \times 5^{10} - 2^{10}}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-9\,758\,457}{6} & \frac{9\,764\,601}{6} \\ \frac{-68\,352\,207}{6} & \frac{68\,358\,351}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\,764\,601 \\ 68\,358\,351 \end{pmatrix}$$

Ainsi, 10 heures après sa diffusion, il y avait 9 764 601 adultes et 68 358 351 adolescents informés de l'histoire soir 78 122 952 personnes.

b. Exprimer a_n et b_n en fonction de n et vérifier la relation $b_n = a_n + 6 \times 5^n$ pour tout $n \geq 0$.

Toujours, d'après la question **1.** et la relation donnée au **3.**, pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ \\ b_n \end{pmatrix} = X_n = A^n \cdot X_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{7 \times 2^n - 5^n}{6} & \dfrac{5^n - 2^n}{6} \\ \dfrac{7 \times 2^n - 7 \times 5^n}{6} & \dfrac{7 \times 5^n - 2^n}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n - 2^n \\ \\ 7 \times 5^n - 2^n \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 5^n - 2^n$ et $b_n = 7 \times 5^n - 2^n = 6 \times 5^n + 5^n - 2^n = 6 \times 5^n + a_n$.

4. ***Pour cette question, toute initiative ou tentative de recherche même non abouties seront prises en compte.***

Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n et b_n sont des multiples impairs de 3.

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 5 \equiv 2\ [3] \\ 2 \equiv 2\ [3] \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} 5^n \equiv 2^n\ [3] \\ 2^n \equiv 2^n\ [3] \end{array}\right\} \Longrightarrow a_n \equiv 5^n - 2^n \equiv 2^n - 2^n \equiv 0\ [3] \\ \qquad 6 \equiv 0\ [3] \Longrightarrow 6 \times 5^n \equiv 0\ [3] \end{array}\right\} \Longrightarrow b_n \equiv a_n + 6 \times 5^n \equiv 0 + 0 \equiv 0\ [3]$$

Donc a_n et b_n sont des multiples de 3.

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 5 \equiv 1\ [2] \\ 2 \equiv 0\ [2] \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} 5^n \equiv 1^n \equiv 1\ [2] \\ 2^n \equiv 0^n \equiv 0\ [2] \end{array}\right\} \Longrightarrow a_n \equiv 5^n - 2^n \equiv 1 - 0 \equiv 1\ [2] \\ \qquad 6 \equiv 0\ [2] \Longrightarrow 6 \times 5^n \equiv 0\ [2] \end{array}\right\} \Longrightarrow b_n \equiv a_n + 6 \times 5^n \equiv 1 + 0 \equiv 1\ [2]$$

Donc a_n et b_n sont impairs.

Exercice 3. Nouvelle-Calédonie novembre 2013 — Commun à tous les candidats

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. Étude d'une fonction auxiliaire

a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g.

g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ comme différence d'un produit de fonctions dérivables et d'une fonction dérivable.

$\forall x \in [0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = \left(x^2\right)' \mathrm{e}^x + \left(\mathrm{e}^x\right)' x^2 - 0 = 2x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x x^2 = x\mathrm{e}^x\,(2 + x)$.

Or, pour $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $x > 0$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $2 + x > 0$, donc $g'(x) > 0$.

Ainsi g est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$. Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;\,0{,}704[$.

$g(0) = 0^2 \times \mathrm{e}^0 - 1 = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} x^2\mathrm{e}^x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\mathrm{e}^x - 1 = +\infty$$

Ainsi $0 \in \left[g(0); \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right[$. De plus g est continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Donc, d'après le théorème de bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

À la calculatrice, $g(0,703) \simeq -0,0018$ donc $g(0,703) < 0$, et $g(0,704) \simeq 0,0020$ donc $g(0,704) > 0$.

Donc $0,703 < a < 0,704$ ie $a \in]0,703; 0,704[$ $(\subset [0,703; 0,704[)$.

c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

g étant strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ et $g(a) = 0$, on obtient le tableau de signes de g suivant :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	(-1)	$-$	0	$+$	$(+\infty)$

2. Étude de la fonction f

a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

La limite de f en 0 est une limite en 0 à droite car f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{e}^x + \frac{1}{x} = +\infty$$

La limite de f en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x + \frac{1}{x} = +\infty$$

b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2\mathrm{e}^x - 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

D'après les variations de f (cf. le tableau de variation précédent), f admet un minimum en $x = a$, ce minimum vaut $f(a)$.

$m = f(a) = \mathrm{e}^a + \dfrac{1}{a}$

Or a vérifie $g(a) = 0$ ie $a^2\mathrm{e}^a - 1 = 0$ donc, sachant que $a \neq 0$ ($a \in [0,703; 0,704[$), $\mathrm{e}^a = \dfrac{1}{a^2}$.

Donc $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

e. Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

On a montré à la question **1.b.** que $0,703 < a < 0,704$ donc

$\dfrac{1}{0,704} < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{0,703}$ (la fonction inverse étant strictement décroissante sur $[0;+\infty[$)

et $0,703^2 < a^2 < 0,704^2 \Longrightarrow \dfrac{1}{0,704^2} < \dfrac{1}{a^2} < \dfrac{1}{0,703^2}$ (sur $[0;+\infty[$, la fonction carré étant strictement croissante et la fonction inverse strictement décroissante)

ainsi $\dfrac{1}{0,704^2} + \dfrac{1}{0,704} < m < \dfrac{1}{0,703^2} + \dfrac{1}{0,703}$

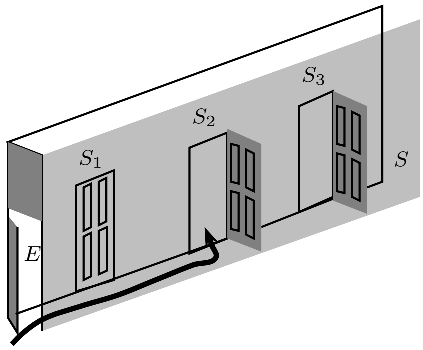
Or $\dfrac{1}{0,704^2} + \dfrac{1}{0,704} \simeq 3,438$ (tronqué au millième) et $\dfrac{1}{0,703^2} + \dfrac{1}{0,703} \simeq 3,445$ (tronqué au millième).

Donc $3,43 < m < 3,45$.

Remarque : On pouvait aussi utiliser la stricte décroissance de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ ($\supset [0,703; 0,704]$) après l'avoir démontrée évidemment.

Exercice 4. Examen de maturité 2008 – Suisse **Commun à tous les candidats**

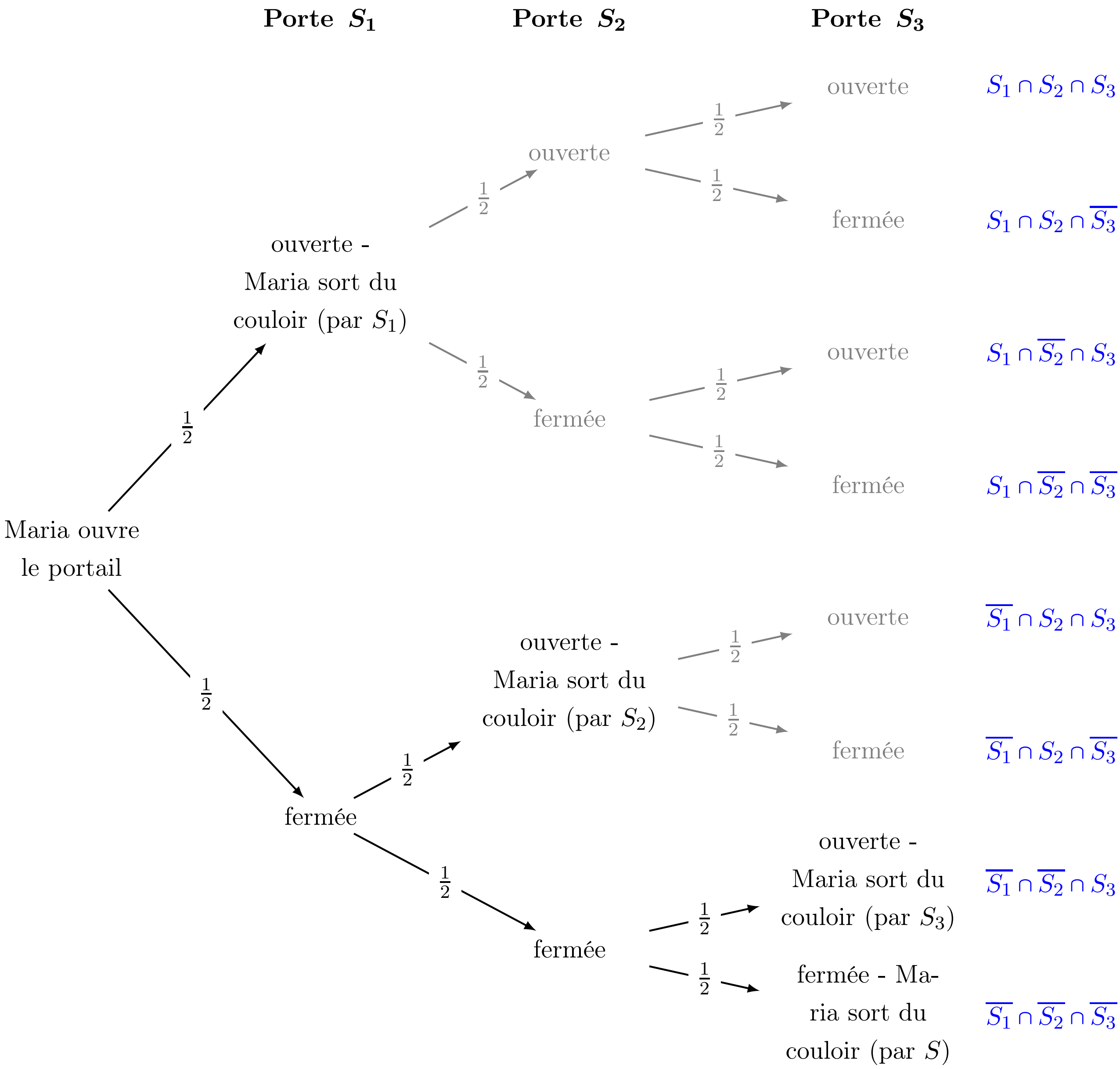
Pour sortir d'une maison hantée, Maria doit passer par un étrange couloir le long duquel se trouvent trois portes fermées, notées S_1, S_2 et S_3. On accède à ce couloir par le portail E. Au moment où on ouvre ce portail, chacune des trois portes a une chance sur deux de s'ouvrir par enchantement. L'étroitesse du couloir oblige Maria à sortir du couloir par la première porte ouverte qu'elle rencontre ; si les trois portes sont fermées, elle doit sortir du couloir par l'issue notée S. Quand Maria a quitté le couloir, le portail et toutes les portes ouvertes se referment.



1. Maria ouvre le portail.

a. Recopier et compléter l'arbre suivant : Notons les événements suivants, pour $i \in \{1;2;3\}$:

- S_i : « La porte S_i est ouverte »
- $\overline{S_i}$: « La porte S_i est ouverte »
- Q_i : « Maria sort du couloir par la porte S_i »
- Q_S : « Maria sort du couloir par l'issue S »



b. Calculer la probabilité que Maria sorte du couloir par l'une des portes S_1, S_2, S_3.
On cherche :

$$
\begin{aligned}
p_1 &= p\left(Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3\right)\\
&= p\left(Q_1\right)+p\left(Q_2\right)+p\left(Q_3\right) \qquad \text{car les } Q_i \text{ sont incompatibles (disjoints) 2 à 2}\\
&= p\left(S_1\right)+p\left(\overline{S_1}\cap S_2\right)+p\left(\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap S_3\right)\\
&= \frac{1}{2}+p\left(\overline{S_1}\right)\times p_{\overline{S_1}}\left(S_2\right)+p\left(\overline{S_1}\right)\times p_{\overline{S_1}}\left(\overline{S_2}\cap S_3\right)\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+p\left(\overline{S_1}\right)\times p_{\overline{S_1}}\left(\overline{S_2}\right)\times p_{\overline{S_1}\cap\overline{S_2}}\left(S_3\right)\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\\
&= \frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}\\
&= \frac{7}{8} \qquad (=0,875)
\end{aligned}
$$

Autre rédaction : On cherche l'événement contraire au fait que Maria sorte par l'issue S : $p_1 = 1-p\left(Q_S\right) = 1-p\left(\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap\overline{S_3}\right) = 1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{8}{8}-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ (Ouf ! On trouve le même résultat)

2. Lorsque Maria passe par les portes S_1 ou S_3, son chemin la ramène au portail E. En revanche, si elle passe par S_2 ou par S, elle sort définitivement de la maison hantée.

On note D l'événement : « Maria sort de la maison en ne passant qu'une seule fois dans le couloir ».

a. Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à $\frac{3}{8}$.

$p(D) = p\left(Q_2 \cup Q_S\right) = p\left(Q_2\right)+p\left(Q_S\right) = p\left(\overline{S_1}\cap S_2\right)+p\left(\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap\overline{S_3}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{2}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

b. Calculer la probabilité que Maria sorte de la maison sachant que la porte S_2 était ouverte.

On cherche la probabilité conditionnelle suivante :

$$p_{S_2}(D) = \frac{p\left(D\cap S_2\right)}{p\left(S_2\right)} = \frac{p\left(\overline{S_1}\cap S_2\right)}{p\left(S_2\right)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \qquad (=0,5).$$

Autre rédaction : Sachant que la porte S_2 est ouverte, Maria a une chance sur deux de revenir au portail E : c'est le cas où la porte S_1 est ouverte ; et Maria a une chance sur deux de sortir de la maison : c'est le cas où la porte S_1 est fermée, elle sort alors par la porte S_2. Donc $p_{S_2}(D) = \frac{1}{2}$.

c. Quelle est la probabilité que Maria passe au plus trois fois dans le couloir avant de sortir de la maison ?

Notons les événements suivants, pour $i \in \{1;2;3\}$:

- D_i : « Maria sort de la maison en passant exactement i fois dans le couloir »

On a $D_1 = D$.
On va utiliser l'indépendance les différents passages successifs de Maria dans le couloir.
On cherche : $p_2 = p\left(D_1\cup D_2\cup D_3\right) = p\left(D_1\right)+p\left(D_2\right)+p\left(D_3\right) = p(D)+p\left(Q_1\cup Q_3\right)\times p\left(Q_2\cup Q_S\right)+p\left(Q_1\cup Q_3\right)\times p\left(Q_1\cup Q_3\right)\times p\left(Q_2\cup Q_S\right) = p(D)+p\left(\overline{D}\right)\times p(D)+p\left(\overline{D}\right)\times p\left(\overline{D}\right)\times p(D) = \frac{3}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{8} = \frac{3}{8}+\frac{15}{64}+\frac{75}{512} = \frac{192}{512}+\frac{120}{512}+\frac{75}{512} = \frac{387}{512} \qquad (=0,755\,859\,375)$

3. Cette fois, 8 personnes franchissent successivement le portail E. Quelle est la probabilité qu'exactement 6 de ces personnes passent par S_2 à leur premier passage ?

Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes qui passent par S_2 à leur premier passage parmi ces huit personnes.
Le passage de chacune de ces personnes est indépendante du passage des autres, et la probabilité de succès ie de sortir par S_2 est $p = p\left(Q_2\right) = p\left(\overline{S_1}\cap S_2\right) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et la probabilité d'échec est $q = 1-p = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=\frac{1}{4}$.
On cherche donc : $p(X=6) = \binom{8}{6}\times\left(\frac{1}{4}\right)^6\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \binom{8}{2}\times\frac{1^6}{4^6}\times\frac{3^2}{4^2} = \frac{8\times 7}{1\times 2}\times\frac{3^2}{4^8} = \frac{4\times 7\times 9}{4^8} = \frac{7\times 9}{4^7} = \frac{63}{2^{14}} = \frac{63}{16\,384} \qquad (\simeq 0,0038).$

4. On suppose maintenant que n personnes franchissent une seule fois chacune le portail E.

Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins une de ces personnes sorte de la maison hantée soit supérieure à 95 % ?

Notons A_n l'événement « Au moins une de ces n personnes sortent de la maison hantée ».
Alors $\overline{A_n}$ est l'événement « Aucune de ces n personnes ne sortent de la maison hantée ».
La probabilité de sortie d'une personne vaut $\frac{3}{8}$ (calculée à la question **2.1.**) et la probabilité de rester dans la maison hantée vaut $\frac{5}{8}$, et la sortie ou non de chacune de ces personnes est indépendante de la sortie ou non des autres personnes.
On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :
$p\left(A_n\right) \geq 95\,\% \iff 1 - p\left(\overline{A_n}\right) \geq 0,95 \iff 1 - 0,95 \geq p\left(\overline{A_n}\right) \iff 0,05 \geq \left(\frac{5}{8}\right)^n$ $\left(\frac{5}{8}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique strictement décroissante (car de raison $\frac{5}{8} \in]0;1[$ et de premier terme $\frac{5}{8}$ strictement positif).
On regarde les valeurs successives de $\left(\frac{5}{8}\right)^n$ à la calculatrice :

- $\left(\frac{5}{8}\right)^6 \simeq 0,0596$
- $\left(\frac{5}{8}\right)^7 \simeq 0,0373$

Donc $n = 7$: il faut au moins sept personnes pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes sorte de la maison hantée soit supérieure à 95 %.

Remarque : Après avoir obtenu $0,05 \geq \left(\frac{5}{8}\right)^n$, on aurait pu continuer la résolution à l'aide de logarithme pour déterminer n.

Barème

Exercice. 1. $5 = (\text{figure} : 0,5) + 0,75 + 0,75 + (0,25 + 0,75 + 0,5) + (0,5 + 0,5 + 0,5)$

Exercice. 2. ***Obligatoire*** $5 = [1,25 + (0,5 + 0,5)] + [0,5 + 0,25 + (0,75 + 0,25) + (0,25 + 0,5 + 0,25)]$

Exercice. 2. ***Spécialité*** $5 = 0,75 + (0,5 + 0,5 + 1) + (0,5 + 0,75) + 1$

Exercice. 3. $5,25 = (1,25 + 1,75 + 0,25) + (0,5 + 0,25 + 0,25 + 0,5 + 0,5)$

Exercice. 4. $5 = (0,5 + 0,75) + (0,5 + 0,5 + 0,75) + 0,75 + 1,25$