Correction bac blanc obl + spé

Exercice 1 : ***(commun à tous les candidats)***

Partie A :

1. On appelle succès « le moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation » Donc l'achat d'un moteur est une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est 0.12. L'achat de 20 moteurs est un schéma de Bernoulli (puisque c'est assimilé à 20 tirages indépendants avec remise) donc la VAR X égale au nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0.12 et on a pour $0 \leq k \leq 20$, $P(X=k) = \binom{20}{k} \times (0.12)^k \times (0.88)^{20-k}$ donc pour k = 2, on obtient :

$P(X=2) = \binom{20}{2} \times (0.12)^2 \times (0.88)^{18} \approx 0,274$.

2. $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (0.88)^{20} \approx 0,922$.

Partie B :

1. On a : $P_{X \geq t}(X \geq s+t) = \dfrac{P[(X \geq s+t) \cap (X \geq t)]}{P(X \geq t)} = \dfrac{P(X \geq s+t)}{P(X \geq t)} = \dfrac{1-P(X \leq s+t)}{1-P(X \leq t)}$ or :

$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dt = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ et $P(X \geq t) = 1 - P(X \leq t) = e^{-\lambda t}$ ce qui donne :

$P_{X \geq t}(X \geq s+t) == \dfrac{1-(1-e^{-\lambda(s+t)})}{1-(1-e^{-\lambda t})} = \dfrac{e^{-\lambda s - \lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \dfrac{e^{-\lambda s} \times e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X \geq s)$.

2. $P(Y \leq 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dt = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^1 = 1 - e^{-\lambda}$ or d'après la partie A, $P(Y \leq 1) = 0.12$ ce qui donne $1 - e^{\lambda} = 0.12 \Leftrightarrow -e^{\lambda} = 0.88 \Leftrightarrow -\lambda = \ln(0.88)$ ou encore $\lambda \approx 0.1278$.

3. $P(Y > 3) = 1 - P(Y \leq 3) = e^{-0.128 \times 3} \approx 0.681$.

4. Ça revient à chercher $P_{Y \geq t}(Y \geq s+t)$ avec t = 1 et s = 3 ce qui donne , d'après la question 1 :
$P_{Y \geq 1}(Y \geq 3+1) = P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 3) = e^{-0.128 \times 3} \approx 0.681$.

5. **a.** On a $g'(x) = -e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x}$ d'où $\lambda x e^{-\lambda x} = g'(x) + e^{-\lambda x}$ et alors :

$$F(t) = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = \int_0^t \left[e^{-\lambda x} + g'(x)\right] dx = \int_0^t e^{-\lambda x} dx + \int_0^t g'(x) dx = \frac{-1}{\lambda}\left[e^{-\lambda x}\right]_0^t + \left[g(x)\right]_0^t$$

$$= \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda} + g(t) - g(0) = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} - te^{-\lambda t} \text{ d'où : } F(t) = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} - te^{-\lambda t}.$$

b. $\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} (-\lambda t) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0 \end{cases}$ *donc* $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$ *et* $\lim\limits_{t \to +\infty} te^{-\lambda t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{e^{\lambda t}} = 0$ (*croissancecomparée*)

donc $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = \dfrac{1}{\lambda}$ et alors $d_m = \dfrac{1}{0.128} \approx 7.8$

Exercice 2 : ***(commun à tous les candidats)***

Partie A :

Pour N = 3, l'algorithme effectue 3 boucles avant de s'arrêter : ci-dessus le déroulement pas à pas :

k	0	1	2
U	3	10	29

Donc pour une entrée de N = 3, la sortie est U = 29.

Partie B :

1. $u_1 = 3 \text{ et } u_2 = 10$

2. **a.** *Démonstration par récurrence* : On pose $P_n : u_n \geq n$

i/ Initialisation : pour n = 0, on a $u_0 = 0$. Donc on a P_0.

ii/ Hérédité : On suppose : $P_n : u_n \geq n$: c'est l'hypothèse de récurrence et montrons P_{n+1} ? On a :

$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \underset{HR: u_n \geq n}{\geq} 3n - n + 3 \geq n + 3 \geq n + 1$, d'où P_{n+1}

iii/ Conclusion : La propriété est vraie pour n = 0 et est héréditaire donc $P_n : u_n \geq n$ est vrai pour tout entier naturel n.

b. On a $u_n \geq n$ et donc, en utilisant le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. pour tout entier naturel n, on a :

$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3 \underset{u_n - n \geq 0}{\geq} 3 > 0$. Donc la suite (u_n) est croissante..

4. **a.** $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$. Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 1$, d'où : $v_n = 3^n$.

b. On a : $v_n = 3^n = u_n - n + 1$, ce qui donne $u_n = 3^n + n - 1$.

5. **a.** Par définition : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ signifie que pour tour A > 0, il existe un rang n_0, tel que :

$n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A$ et particulier si A = 10^p, $p \in \mathbb{N}^*$. Donc on peut affirmer que oui

b. On a : $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1 \underset{p \in \mathbb{N}^*}{\geq} 27^p \geq 10^p$. Donc $u_{3p} \geq 10^p$ or n_0 est le plus petit entier tel que $u_{n_0} \geq 10^p$ d'où $n_0 \leq 3p$.

c. Avec la calculatrice ou en programmant l'algorithme on trouve : $u_6 = 734 \text{ et } u_7 = 2193$ donc n_0 = 7

d. Un algorithme en langage naturel, Xcas et casio :

Entrée : p

affecter à u *la valeur* 0

affecter à k *la valeur* 0

tantque $u < 10^p$

  affecter à u *la valeur* $3u - 2k + 3$

  affecter à k *la valeur* $k + 1$

finantque

afficher k.

```
saisir(p);
u:=0;
k:=0;
tantque u<10^p faire
  u:=3*u-2*k+3;
  k:=k+1
ftantque;
afficher(k);
afficher(u);
```

```
k:7
u:2193
```

```
======EXO 3 BB==
"P="?→P↵
0→U↵
0→K↵
While U<10^P:↵
3×U-2×K+3→U↵
K+1→K↵
WhileEnd↵
"K=":K◢
"U=":U◢
```

Exercice 3 : ***(candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité) :***

1. La fonction $\begin{cases} x \mapsto x+1 \text{ est continue et est strictement positive sur }]-1\,;+\infty[\\ X \mapsto \ln X \text{ est continue sur }]0\,;+\infty[\end{cases}$

donc par composition la fonction *f* est continue sur $]-1;+\infty[$ et donc, théorème du cours, la fonction *F* définie pour tout $]-1;+\infty[$ par $\int_0^x f(t)dt$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et a pour fonction dérivée : $F'(x) = f(x)$. ***F est l'unique primitive de f qui s'annule en 0.(théorème de cours)***

2. **a**. En fait c'est la formule d'approximation affine tangente qui est donnée dans l'algorithme :

$$F(a+h) \approx hF'(a) + F(a)$$
$$\approx hf(a) + F(a)$$

Avec a = 1 et h = 0.2

$$F(1,2) = F(1+0,2) \approx 0,2\,f(1) + F(1) \approx 0,2\ln 2 + 2\ln 2 - 1 = 2,2\ln 2 - 1$$
$$F(1,4) = F(1,2+0,2) \approx 0,2\,f(1,2) + F(1,2) \approx 0,2\ln(2,2) + 2,2\ln 2 - 1$$

	M_0	M_1	M_2
x	1	1,2	1,4
y	2ln(2) - 1	$-1+2,2\ln(2)$	$-1+2,2\ln 2+0,2\ln(2,2)$

b. Le coefficient directeur de la droite (M_1M_2) :

$$a = \frac{y_{M_2} - y_{M_1}}{x_{M_2} - x_{M_1}} = \frac{-1+2,2\ln 2+0,2\ln(2,2) - 1 + 2,2\ln(2)}{1,4-1,2} = \ln(2,2).$$

c. Résultats obtenus avec un tableur : (même résultats avec casio)

	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y	**0,39**	**0,52**	**0,68**	**0,86**	**1,05**	**1,25**

3. **a**. On pose $G(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

On a : $G'(x) = (x+1)\times\frac{1}{x+1} + \ln(x+1) - 1 = \ln(x+1) = f(x)$ et $G(0) = 0$ or On a dit que *F* est l'unique primitive de *f* qui s'annule en 0 et donc *F(x) = G(x).*

b. On a : $F'(x) = f(x) = \ln(x+1)$ et $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 0 = \ln 1 \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et donc la fonction *F* est strictement décroissante sur]-1 ; 0] et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)\left(\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right)\right] = +\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1} = 1$

$\lim\limits_{x\to-1^+} F(x) = 1$ *car* $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)\ln(x+1) \underset{X=x+1}{=} \lim\limits_{X\to 0^+} X\ln X = 0$

4. $\int_1^2 f(x)dx = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) = 3\ln 3 - 2 - (2\ln 2 - 1) = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1 = \ln\left(\frac{27}{4}\right) - 1$

Exercice 4 : ***(commun à tous les candidats)***

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	$\frac{13}{18}$	$\frac{3}{16}$	$\left\{\frac{-2\pi}{3}\,;\,\frac{2\pi}{3}\right\}$	]0 ; 1]	un trapèze	non coplanaires

Correction 3 : (*candidats ayantsuivi l'enseignement de spoécialité)*

1. **a.** On a : $11\times4-5\times6=14$. Donc (4 ; 6) est solution de (E).

   b. On a : Soit $(x;y)$ une solution de (E) alors :

   $1x-5y=14$

   $11\times4-5\times6=14$

   D'où par différence : $11(x-4)=5(y-6)$ (*). 11 divise $11(x-4)$ donc 11 divise $5(y-6)$ or 11 et 5 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 11 divise $(y-6)$ d'où il existe k entier relatif tel que $y-6=11k$ ou encore $y=6+11k$ et, en remplaçant y - 6 = par $11k$ dans (*), on obtient : $11\times(x-4)=5\times11k$ ce qui donne $x=4+5k$ et finalement : $(x;y)=(4+5k;6+11k)$.

   On vérifie, réciproquement, que tous les couples $(4+5k;6+11k)$ sont solutions de (E) car : $11\times(4+5k)-5\times6+11k)=14$.

   Conclusion : $S=\{(4+5k;6+11k),k\in\mathbb{Z}\}$.

2. **a.** On a : $2^3=8\ et\ 8\equiv1[7]$, donc pour tout entier naturel *n*, $2^{3n}\equiv1[7]$

   b. On a : $2011=287\times7+2$, donc $2011\equiv2[7]$ et par conséquent $2011^{2012}\equiv2^{2012}[7]$ et $2012=3\times670+2$ d'où :

$$\begin{aligned}2011^{2012}&\equiv2^{2012}[2011]\\&\equiv2^{3\times670+2}[2011]\\&\equiv(2^3)^{670}\times2^2[7]\\&\equiv4[7]\end{aligned}$$

   Conclusion : le reste de la division euclidienne de 2^{2012} *par* 7 *est* 4.

3. **a**. $V_1=AU_1=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times8+5\times13\\1\times8+3\times13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}81\\47\end{pmatrix}$

   $V_2=AU_2=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times3+5\times8\\1\times3+3\times8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}46\\27\end{pmatrix}$

   $V_3=AU_3=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times2+5\times4\\1\times2+3\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\14\end{pmatrix}$

   b. On a : $V_1\equiv\begin{pmatrix}3\\21\end{pmatrix}\text{mod}(26),\ V_2\equiv\begin{pmatrix}20\\1\end{pmatrix}\text{mod}(26)\ et\ V_3\equiv\begin{pmatrix}24\\14\end{pmatrix}\text{mod}(26)$ or :

   $\begin{cases}3\to D\\21\to V\end{cases};\begin{cases}20\to U\\1\to B\end{cases}\ et\ \begin{cases}24\to Y\\14\to O\end{cases}$ et alors « INDICE » sera codé par « **DVUBYO** »

4. **a.** Avec A = 12, on a : $\sqrt{12}\approx3.4$ et donc la boucle « tant que » de l'algorithme est répétée 3 fois, d'où le tableau suivant :

N	*A/N*	**ENT(*A/N*)**	***A/N – ENT(A/N)*** $\overset{?}{=}$ **0**	**Affichage**	
1	12	12	Oui	*N = 1*	*A/N = 12*
2	6	6	Oui	*N = 2*	*A/N = 6*
3	4	4	Oui	*N = 3*	*A/N = 4*

   b. Cet algorithme permet d'afficher tous les diviseurs de *A*.