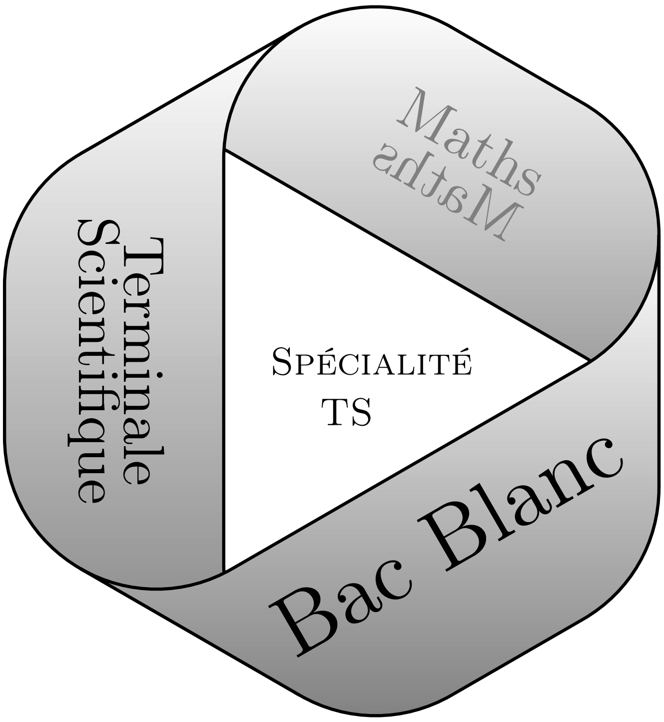


Lycée René Cassin, Gonesse (Val d'Oise, France métropolitaine)

Modalités :

- Durée de l'épreuve : 4 heures ;
- Calculatrice autorisée ;
- L'utilisation de documents manuscrits ou tapuscrits (hors le sujet présent) est interdite ;
- La rédaction et la clarté des raisonnements seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1. 5 points

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).
Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1 + \text{i}$, $3 - \text{i}$ et 2.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$.
Le point M' est appelé l'image de M.

1. Faire une figure sur une feuille de papier millimétré et compléter cette figure tout au long de l'exercice.

2. Calculer les affixes des points A' et B', images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?

3. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5.

4. **a.** Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = (z - 2)^2$.

b. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ et, lorsque z est différent de 2, une relation entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.

c. Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2 ?

5. Soient E le point d'affixe $2 + 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe -4 et E' l'image de E.

a. Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{IE}\right)$.

b. Calculer la distance JE' et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{JE'}\right)$.

c. Construire à la règle et au compas le point E' ; on laissera apparents les traits de construction.

Exercice 2. 5 points

Candidats suivant la spécialité Mathématiques

À 8 heures du matin, un 1er Avril, six adolescents blagueurs diffusent sur les réseaux sociaux une histoire drôle.
On a observé que le nombre de personnes informées de cette histoire augmente rapidement heure après heure.
Ainsi à 9 heures de ce 1er Avril, on dénombrait 3 adultes et 33 adolescentes informés de l'histoire.
1 heure après, on dénombrait 21 adultes et 171 adolescents informés de l'histoire.
1 heures après encore, on dénombrait 984 personnes dont 117 adultes informées.

Pour chaque entier naturel n, on note a_n le nombre d'adultes informés de l'histoire à l'instant $(8+n)$ heures et b_n le nombre d'adolescents informés de l'histoire au même instant.

Une étude mathématique a permis de montrer que les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ vérifient les relations : $a_0 = 0$; $b_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{3a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \dfrac{-7a_n + 11b_n}{2}$.

On note A la matrice $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $X_{n+1} = A \cdot X_n$ et $X_n = A^n \cdot X_0$.

2. On note Q la matrice définie par : $Q = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

- **a.** Justifier que Q est inversible et donner sa matrice inverse Q^{-1}.
- **b.** Sur la copie, détailler les calculs donnant le produit : $Q \cdot A$.
- **c.** Sachant que ce produit est égal au produit $D \cdot Q$ où D est la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, démontrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $A^n = Q^{-1} \cdot D^n \cdot Q$.

3. Tous calculs faits, on montre que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, A^n est égale à $\begin{pmatrix} \frac{7\times 2^n - 5^n}{6} & \frac{5^n - 2^n}{6} \\ \frac{7\times 2^n - 7\times 5^n}{6} & \frac{7\times 5^n - 2^n}{6} \end{pmatrix}$ ***(ce que l'on ne demande pas de justifier)***.

- **a.** Calculer le nombre de personnes informées de l'histoire 10 heures après sa diffusion.
- **b.** Exprimer a_n et b_n en fonction de n et vérifier la relation $b_n = a_n + 6 \times 5^n$ pour tout $n \geq 0$.

4. ***Pour cette question, toute initiative ou tentative de recherche même non abouties seront prises en compte.***
Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n et b_n sont des multiples impairs de 3.

Exercice 3. 5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. Étude d'une fonction auxiliaire

a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g.

b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$. Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;\ 0{,}704[$.

c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Étude de la fonction *f*

a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

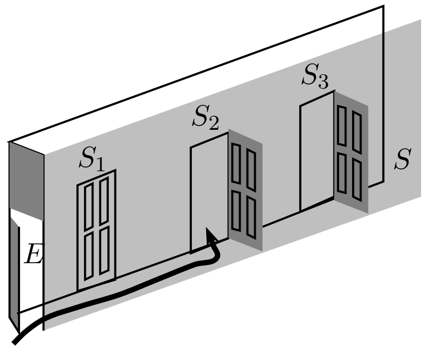
d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

e. Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

Exercice 4. 5 points

Commun à tous les candidats

Pour sortir d'une maison hantée, Maria doit passer par un étrange couloir le long duquel se trouvent trois portes fermées, notées S_1, S_2 et S_3. On accède à ce couloir par le portail E. Au moment où on ouvre ce portail, chacune des trois portes a une chance sur deux de s'ouvrir par enchantement. L'étroitesse du couloir oblige Maria à sortir du couloir par la première porte ouverte qu'elle rencontre ; si les trois portes sont fermées, elle doit sortir du couloir par l'issue notée S. Quand Maria a quitté le couloir, le portail et toutes les portes ouvertes se referment.



1. Maria ouvre le portail.

a. Recopier et compléter l'arbre suivant :

Porte S_1 | **Porte S_2**

Maria ouvre le portail → ouverte - Maria sort du couloir

Maria ouvre le portail → fermée → ouverte - Maria sort du couloir

b. Calculer la probabilité que Maria sorte du couloir par l'une des portes S_1, S_2, S_3.

2. Lorsque Maria passe par les portes S_1 ou S_3, son chemin la ramène au portail E. En revanche, si elle passe par S_2 ou par S, elle sort définitivement de la maison hantée.

On note D l'événement : « Maria sort de la maison en ne passant qu'une seule fois dans le couloir ».

a. Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à $\dfrac{3}{8}$.

b. Calculer la probabilité que Maria sorte de la maison sachant que la porte S_2 était ouverte.

c. Quelle est la probabilité que Maria passe au plus trois fois dans le couloir avant de sortir de la maison ?

3. Cette fois, 8 personnes franchissent successivement le portail E. Quelle est la probabilité qu'exactement 6 de ces personnes passent par S_2 à leur premier passage ?

4. On suppose maintenant que n personnes franchissent une seule fois chacune le portail E.

Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins une de ces personnes sorte de la maison hantée soit supérieure à 95 % ?

Fin