∿ Bac blanc de mathématiques Corrigé 2014 ∿

Exercice 1 Commun à tous les candidats *5 pts*

Partie A : étude de fonction

1. Pour tout réel x on a $f(x) = x\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-1} + 1$, or (croissances comparées) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, donc, par opérations sur les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
   On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.
2. On a $f(x) = x\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-1} + 1$, et, par opérations sur les limites (il n'y a aucune forme indéterminée ici) : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. Par opérations usuelles sur les dérivées :
   $$f'(x) = 1\mathrm{e}^{x-1} + x \times 1 \times \mathrm{e}^{x-1} = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}.$$
4. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x-1} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+1$. Or $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$, on en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	↘	$1-\mathrm{e}^{-2}$	↗	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

1. La tangente T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire :
   $$y = (a+1)\mathrm{e}^{a-1}(x-a) + a\mathrm{e}^{a-1} + 1.$$
2. Soit $a > 0$, alors :
   $$\begin{aligned} \mathrm{O}(0\,;\,0) \in \mathrm{T}_a &\iff 0 = (a+1)\mathrm{e}^{a-1}(-a) + a\mathrm{e}^{a-1} + 1 \\ &\iff 0 = \mathrm{e}^{a-1}(-a^2 - a + a) + 1 \\ &\iff 1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0. \end{aligned}$$
3.
   - 1 est une solution de l'équation considérée car $1 - 1^2\mathrm{e}^{1-1} = 1 - 1 = 0$.
   - Montrons maintenant que cette équation n'admet qu'une unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
     Posons, pour tout $x > 0$, $g(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{x-1}$. La fonction g est alors dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$:
     $$g'(x) = -2x\mathrm{e}^{x-1} - x^2\mathrm{e}^{x-1} = -x(2+x)\mathrm{e}^{x-1}.$$
     $x > 0$, donc $x + 2 > 0$ et par ailleurs $\mathrm{e}^{x-1} > 0$, on en déduit que $g'(x) < 0$ et donc que g est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
     Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
     On sait que g est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et s'annule en 1.
     Donc si $x < 1$, alors $g(x) > g(1)$ soit $g(x) > 0$ et de même si $x > 1$, alors $g(x) < g(1)$ donc $g(x) < 0$.
     Conclusion : sur $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) = 0 \iff x = 1$.
4. La tangente cherchée est T_1, elle a pour équation $y = 2(x-1) + 2$, c'est-à-dire $y = 2x$

Exercice 2   Commun à tous les candidats   *6 pts*

PARTIE A.

Lorsque N = 3 l'algorithme effectue trois boucles avant de s'arrêter. À la fin de la boucle pour $k=0$ on a U = 3 ; à la fin de la boucle $k=1$ on a U = 10 et à la fin de la boucle correspondant à $k=2$ on obtient U = 29.
L'affichage en sortie est donc 29.

PARTIE B.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3u_n-2n+3$.

1. $u_1=3$ et $u_2=10$.

2. **a.** Démontrons par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété P_n : $u_n \geqslant n$.
- $u_0=0 \geqslant 0$ donc la propriété P_0 est vérifiée.
- Supposons la propriété P_n vraie pour une valeur de n fixée.
  $u_{n+1}=3u_n-2n+3 \geqslant 3n-2n+3 \geqslant n+3 \geqslant n+1$ la propriété est donc alors vérifiée au rang $n+1$.
- Conclusion : D'après la propriété de récurrence on en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

b. d'après le théorème de comparaison $\lim(u_n)=+\infty$.

3. Pour tout entier naturel n ; $u_{n+1}-u_n=3u_n-2n+3-u_n=2u_n-2n+3 \geqslant 3 \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-n+1$.

a. Pour tout entier naturel n $v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)+1=3u_n-2n+3-n-1+1=3(u_n-n+1)=3v_n$.
La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0=1$ et de raison 3.

b. Pour tout entier naturel n, $v_n=3^n$ et $u_n=v_n+n-1$ donc $u_n=3^n+n-1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.

a. La suite (u_n) tend vers $+\infty$ donc on peut affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.

b. $u_{3p}=3^{3p}+3p-1=27^p+3p-1 \geqslant 27^p \geqslant 10^p$ donc $n=3p$ est une valeur de n telle que $u_n \geqslant 10^p$; n_0 étant la plus petite de ces valeurs, on a donc $n_0 \leqslant 3p$

c. $u_6=734$ et $u_7=2193$ donc pour la valeur $p=3$; $n_0=7$.

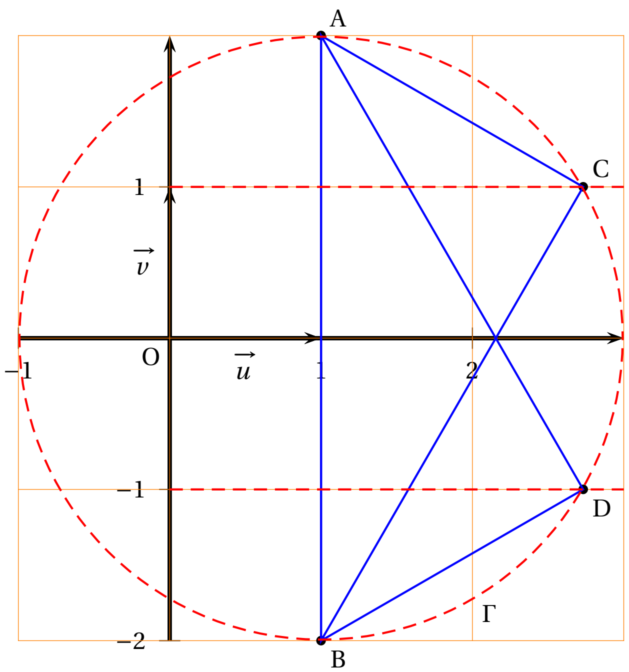
d. Algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul p.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Affecter à k la valeur 0
Tant que U < 10^p
Affecter à U la valeur $3\text{U}-2k+3$
Affecter à k la valeur $k+1$
Fin tant que
Sortie
Afficher k

Exercice 3 Commun à tous les candidats *4 pts*

Commun à tous les candidats

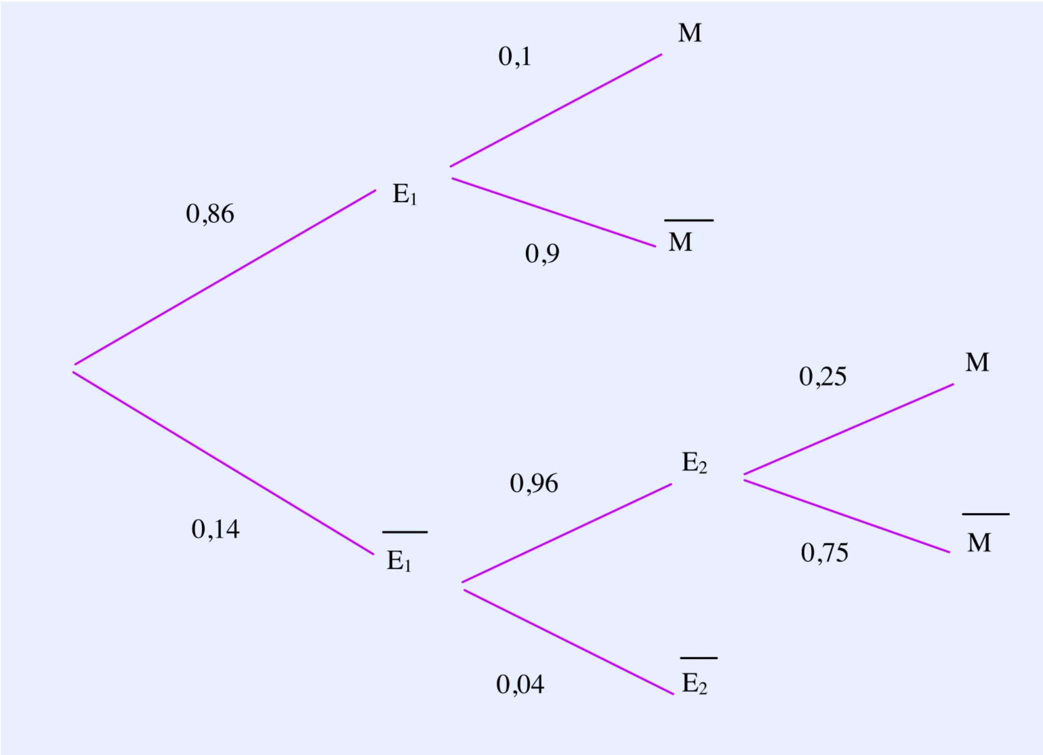
1. $z^2-2z+5=0 \iff (z-1)^2-1+5=0 \iff (z-1)^2+4=0 \iff (z-1)^2-(2\text{i})^2=0 \iff$ $(z-1+2\text{i})(z-1-2\text{i})=0$
   L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées : $1+2\text{i}$ et $1-2\text{i}$.
2. **a.** Voir la figure ci-dessous.
   b. $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{1-2\text{i}-1-\sqrt{3}-\text{i}}{1+2\text{i}-1-\sqrt{3}-\text{i}}\dfrac{-3\text{i}-\sqrt{3}}{\text{i}-\sqrt{3}}=$
   $\dfrac{\left(-3\text{i}-\sqrt{3}\right)\left(\text{i}+\sqrt{3}\right)}{\left(\text{i}-\sqrt{3}\right)\left(\text{i}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{3-3\text{i}\sqrt{3}-3-\text{i}\sqrt{3}}{\text{i}^2-3}=\dfrac{-4\text{i}\sqrt{3}}{-4}=\text{i}\sqrt{3}.$
   c. $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\text{i}\sqrt{3}$ (imaginaire pur) : cette égalité montre qu'un argument du quotient est égal à $\dfrac{\pi}{2}$, soit $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.
   Conclusion le triangle ABC est rectangle en C. (non isocèle car CB $=\sqrt{3}$CA)
3. Le triangle ABC est rectangle d'hypoténuse [AB] ; il est donc inscrit dans un cercle Γ de centre le milieu de [AB] soit le point d'affixe 1 et de rayon $\dfrac{1}{2}$AB $=2$.
   Dans la symétrie autour de l'axe $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}\right)$ les points A et B sont symétriques de même que les points C et D puisque leurs affixes sont conjuguées.
   Le symétrique du triangle ABC est donc le triangle BAD. La symétrie étant une isométrie, le triangle BAD est lui aussi rectangle en D donc inscrit dans le même cercle Γ centré au milieu de [AB] et de rayon 2.
4. C est le point partie réelle positive, intersection du cercle précédent Γ et de la droite d'équation $y=1$.idem pour D avec la droite d'équation $y=-1$.



Exercice 4   Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité   5pts

Partie A

1°)



2°) D'après l'arbre, la probabilité d'obtenir son bac S en deux ans maximum est de

$p(E_1) + p(\overline{E}_1 \cap E_2)$ = 0,86 + 0,14X0,96 = 0,9944

3°) D'après l'arbre, la probabilité d'obtenir son bac S en deux ans maximum avec mention TB est de :

p(M) = 0,86X0,1 +0,14X0,96X0,25 = 0,1196

4°) On cherche la probabilité $p_M(E_1)$

On sait que $p_M(E_1) = \dfrac{p(E_1 \cap M)}{p(M)}$ = $\dfrac{0,86 \times 0,1}{0,1196} \approx 0,7191$ à 10^{-4} près.

Partie B

La probabilité de réussir l'année suivant un échec est de 0,96.

On calcul donc la probabilité de réussir en 3 ans puis 4 ans etc…

On obtient :

$P(E_3)$ = 0,86 + 0,14X0,96 +0,14X 0,04X0,96 = 0,999776

$p(E_4)$ = 0,86 + 0,14X0,96 +0,14X 0,04X0,96 + 0,14X0,04X0,04X0,96 = 0,99999104

Conclusion : n = 4.