

# Chapitre 20

## Systemes d'equations lineaires

### 20.1 Interpretations d'un systeme

Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$  et  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ .

On considere le systeme de  $n$  equations a  $p$  inconnues :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p & = b_n \end{cases}$$

- *Resoudre* le systeme consiste a trouver l'ensemble  $\mathbb{S}$  de tous les  $p$ -uplets  $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$  verifiant (S).
- Le vecteur  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$  s'appelle le *vecteur second membre* du systeme.
- On appelle *systeme homogene* associe, le systeme obtenu lorsque  $b = 0$ . On note  $\mathbb{S}_0$  l'ensemble des solutions du systeme homogene.
- La matrice  $A$  s'appelle *matrice* du systeme.
- $\text{rg}(A)$  s'appelle le *rang* du systeme.
- On dit que le systeme est *compatible* si l'ensemble des solutions est non-vide.

#### 20.1.1 Interpretation vectorielle

Soit  $E = \mathbb{K}^n$ ,  $C_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1})$ ,  $\dots$ ,  $C_p = (a_{1p}, \dots, a_{np}) \in \mathbb{K}^n$  les vecteurs colonnes de la matrice  $A$  et  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$  le vecteur second membre.

Alors

$$\boxed{((x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de (S)}) \iff (x_1 C_1 + \dots + x_p C_p = b)}$$

Le systeme est compatible ssi  $b \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ .

Le rang du systeme est le rang du systeme de vecteurs  $(C_1, \dots, C_p)$  dans  $\mathbb{K}^n$ .

#### 20.1.2 Interpretation matricielle

Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ .

$$\boxed{((x_1, \dots, x_p) \text{ est solution de (S)}) \iff (AX = B)}$$

#### 20.1.3 Interpretation lineaire

Soit  $E = \mathbb{K}^p$  et  $F = \mathbb{K}^n$ , munis des bases canoniques  $e = (e_1, \dots, e_p)$  et  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Soit  $b = (b_1, \dots, b_n) \in F$ . Il existe une unique application lineaire  $u \in L(E, F)$  telle que  $\text{Mat}_{e,f}(u) = A$ . Soit  $x \in E$  l'unique vecteur tel

que  $\text{Mat}_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ . Alors

$$\boxed{((x_1, \dots, x_p) \text{ est solution de } (S)) \iff (u(x) = b)}$$

Le système est compatible ssi  $b \in \text{Im } u$ .

### 20.1.4 Interprétation duale

Considérons les  $n$  formes linéaires de  $\mathbb{K}^{p*}$  :

$$f_i : \begin{cases} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p \end{cases}$$

Alors

$$\boxed{(x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (S)) \iff (f_1(x) = b_1, \dots, f_n(x) = b_n)}$$

L'ensemble des solutions du système homogène est alors  $\mathbb{S}_0 = \text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_n$ .

### 20.1.5 Structures de l'ensemble des solutions

**THÉORÈME 20.1 : Structure de l'ensemble des solutions du système homogène**

$\mathbb{S}_0$  est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $\boxed{p - \text{rg}(S)}$

**THÉORÈME 20.2 : Structure de l'ensemble des solutions de  $(S)$**

1. Si le système est incompatible,  $\mathbb{S} = \emptyset$  ;
2. Si le système est compatible, alors il existe une solution particulière  $x_0$ . Dans ce cas,

$$\boxed{\mathbb{S} = \{x_0 + x; x \in \mathbb{S}_0\}}$$

et  $\mathbb{S}$  est un espace affine de dimension  $p - \text{rg}(S)$ .

## 20.2 Systèmes de Cramer

**DÉFINITION 20.1 : Système de Cramer**

Un système de Cramer est un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues de rang  $n$ .

Matriciellement, un système de Cramer s'écrit

$$AX = B$$

avec  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée inversible et  $B \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ .

**THÉORÈME 20.3 : Résolution matricielle d'un système de Cramer**

Un système de Cramer possède une unique solution  $\boxed{X = A^{-1}B}$ .

**THÉORÈME 20.4 : Formules de Cramer**

Soient  $(C_1, \dots, C_n)$  les  $n$  vecteurs colonnes de la matrice  $A$  d'un système de Cramer,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$  le vecteur second membre et  $(x_1, \dots, x_n)$  l'unique solution de  $(S)$ . Alors,  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\boxed{x_j = \frac{\det(C_1, \dots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \dots, C_n)}{\det A}}$$

#### Exercice 20-1

Résoudre le système

$$\begin{cases} x + ay + a^2z & = \alpha \\ x + by + b^2z & = \beta \\ x + cy + c^2z & = \gamma \end{cases}$$

où  $a, b, c$  sont trois réels distincts.

#### Exercice 20-2

Déterminer le nombre de multiplications, divisions nécessaire pour résoudre un système de Cramer, en utilisant

*Remarque 222.* L'intérêt des formules de Cramer est donc purement théorique. Pour programmer la résolution d'un système d'équations linéaires, on a recours à des algorithmes plus efficaces (par exemple l'algorithme du pivot de Gauss pour un système quelconque).

## 20.3 Opérations élémentaires

### DÉFINITION 20.2 : Matrices élémentaires

On définit les matrices suivantes :

1. Matrices de dilatation ( $\lambda \neq 0, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ) :

$$D_\lambda(i) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 \\ & & & \lambda & \\ & & & & 1 \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$$

2. Matrices de permutation ( $i \neq j$ ) :

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$$

3. Matrices de transvection ( $\lambda \neq 0, i \neq j$ ) :

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + \lambda E_{ij}$$

**THÉORÈME 20.5 : Propriétés des matrices élémentaires**

1. Les matrices élémentaires sont inversibles et on calcule facilement leur déterminant et leur inverse :
  - (a)  $\det(D_\lambda(i)) = \lambda, D_\lambda(i)^{-1} = D_{1/\lambda}(i)$
  - (b)  $\det(P_{ij}) = -1, P_{ij}^{-1} = P_{ij}$
  - (c)  $\det(T_{ij}(\lambda)) = 1, T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$ .
2. Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice quelconque : Multiplier à gauche la matrice  $A$  par une matrice élémentaire correspond à une opération élémentaire sur les lignes de la matrice  $A$  :
  - (a)  $D_\lambda(i) \times A : L_i \leftarrow \lambda L_i$
  - (b)  $P_{ij} \times A : L_i \leftrightarrow L_j$
  - (c)  $T_{ij}(\lambda) \times A : L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
3. Multiplier à droite la matrice  $A$  par une matrice élémentaire correspond à une opération élémentaire sur les colonnes de la matrice  $A$  :
  - (a)  $A \times D_\lambda(i) : C_i \leftarrow \lambda C_i$
  - (b)  $A \times P_{ij} : C_i \leftrightarrow C_j$
  - (c)  $A \times T_{ij}(\lambda) : C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

**PROPOSITION 20.6 : Algorithme du rang**

En effectuant un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice, on ne modifie pas son rang.

*Remarque 223.* On justifie ainsi l'algorithme du rang vu en td.

## 20.4 Méthode du pivot de Gauss

**THÉORÈME 20.7 : Résolution d'un système triangulaire**

On considère une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure)  $T$  inversible et le système  $TX = B$ . On dispose d'un algorithme qui résout ce système en  $\mathcal{O}(n^2)$  multiplications scalaires.

**THÉORÈME 20.8 : Transformation en système triangulaire**

Soit une matrice inversible  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et le système de Cramer associé  $AX = B$ . On peut transformer à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ce système en un système équivalent triangulaire supérieur en  $\mathcal{O}(n^3)$  multiplications scalaires.

**THÉORÈME 20.9 : Algorithme du pivot de Gauss**

On sait résoudre un système de Cramer  $n \times n$  en  $\mathcal{O}(n^3)$  multiplications scalaires.

**COROLLAIRE 20.10 : Calcul d'un déterminant**

On sait calculer le déterminant d'une matrice  $n \times n$  en  $\mathcal{O}(n^3)$  multiplications scalaires.