Chapitre 9

Suites réelles

9.1 Définitions

Définition 9.1 : **Suite**
Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ (on dira qu'une application définie à partir d'un certain rang n_0 est aussi une suite). On note cette application sous forme indicielle :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ou } (u_n)$$

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles.

Remarque 58. Attention aux notations : (u_n) désigne une suite : $(u_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors que u_n désigne un terme de la suite : $u_n \in \mathbb{R}$.

On adoptera une des visualisation suivantes pour une suite :

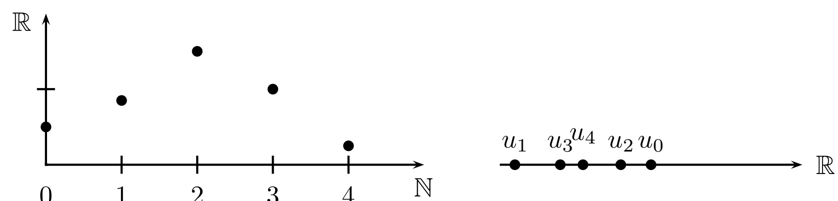


Fig. 9.1 – *Représentation d'une suite*

Définition 9.2 : **Opérations sur les suites**
On définit les lois suivantes sur l'ensemble des suites :
- Addition : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$;
- Multiplication par un réel : $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$;
- Multiplication de deux suites : $(u_n).(v_n) = (u_n.v_n)$.

Définition 9.3 : **Suites bornées**
On dit qu'une suite (u_n) est majorée ssi $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
On dit qu'une suite (u_n) est minorée ssi $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.
On dit qu'une suite et bornée ssi elle est majorée et minorée.

Définition 9.4 : **Suites monotones**
On dit qu'une suite (u_n) est croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
On dit qu'une suite (u_n) est décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
On dit qu'une suite (u_n) est monotone ssi elle est croissante ou décroissante.

Définition 9.5 : **À partir d'un certain rang**
On dit qu'une propriété $p(n)$ est vérifiée à partir d'un certain rang si et seulement si $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, la propriété $p(n)$ est vraie.

9.2 Limite d'une suite

DÉFINITION 9.6 : Limite, suite convergente, suite divergente
On dit que la suite (u_n) converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tq } \ \forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \varepsilon}$$

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ ou encore $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.
S'il existe un réel l tel que la suite converge vers l, on dit que la suite est *convergente*.
S'il n'existe pas de réel l vérifiant la propriété ci-dessus, on dit que la suite *diverge*.

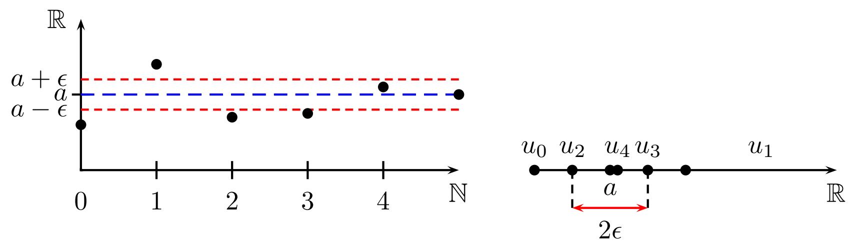


FIG. 9.2 – *Convergence d'une suite*

Pour montrer que $u_n \to l$, on utilise le plan :

1. *Soit* $\varepsilon > 0$.
2. *Posons* $N = \dots$.
3. Vérifions : *Soit* $n \geq N$.
4. On a bien $|u_n - l| \leq \varepsilon$
5. Donc $u_n \to l$.

`Exemple 13.` Montrer en utilisant la définition que la suite $(1/n)$ converge vers 0.
Remarque 59. La limite d'une suite est un *nombre réel indépendant de* n. Ecrire par exemple

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{n}$$

n'a absolument aucun sens !
Remarque 60. On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$ (on dit que (u_n) *diverge* vers $+\infty$ ou $-\infty$) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tq } \forall n \geq N,\ u_n \geq A}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tq } \forall n \geq N,\ u_n \leq A}$$

Pour montrer que $u_n \to +\infty$, on utilise le plan :

1. *Soit* $A > 0$.
2. *Posons* $N = \dots$.
3. Vérifions: *Soit* $n \geq N$.
4. On a bien $u_n \geq A$.

Exercice 9-1

Montrez en utilisant la définition que la suite $(\sqrt{n})$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 9-2

- Trouver une suite divergente qui ne tend pas vers $\pm\infty$;
- Trouver une suite non-bornée qui ne diverge pas vers $\pm\infty$.

– Trouver une suite convergente qui n'est pas monotone ;

THÉORÈME 9.1 : **On peut utiliser une inégalité stricte dans la définition**

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ |u_n-l|<\varepsilon$$

Exercice 9-3

Ecrire à l'aide de quantificateurs les propriétés :

a) (u_n) ne converge pas vers $l\in\mathbb{R}$;

b) (u_n) ne diverge pas vers $+\infty$;

c) (u_n) diverge.

THÉORÈME 9.2 : **Unicité de la limite**
La limite d'une suite si elle existe est unique.

THÉORÈME 9.3 : **Une suite convergente est bornée.**
Si $\exists l\in\mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, alors

$$\exists M>0 \text{ tq } \forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leq M$$

THÉORÈME 9.4 : **Une suite convergeant vers un réel strictement positif est positive à partir d'un certain rang**
Soit une suite (u_n) qui converge vers une limite $l>0$. Alors cette suite est à termes positifs à partir d'un certain rang. Plus généralement, si une suite (u_n) converge vers un réel $l\in\mathbb{R}$, pour tous réels $k<l<k'$, il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq N \Rightarrow k\leq u_n\leq k'$$

THÉORÈME 9.5 : **Passage à la limite dans les inégalités**
Soit deux suites (u_n) et (v_n). On suppose que

H1 $u_n\leq v_n$ à partir d'un certain rang ;

H2 $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$.

Alors on a $l\leq l'$.

Remarque 61. Même si l'on a des inégalités strictes dans 1 , on ne peut obtenir que des inégalités larges après passage à la limite, (penser aux suites de termes généraux $u_n=1/n$ et $v_n=2/n$)

THÉORÈME 9.6 : **Théorème de majoration**
Soit (u_n) une suite et un réel $l\in\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite (α_n) et un rang $N\in\mathbb{N}$ tels que :

H1 $\forall n\geq N,\ |u_n-l|\leq\alpha_n$.

H2 $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Remarque 62. Ce théorème est très utilisé en pratique pour montrer la convergence d'une suite lorsqu'on devine sa limite.

`Exemple 14.` Montrer que les suites de terme général $u_n=1/2^n$ et $v_n=2^n/n!$ convergent vers 0.

THÉORÈME 9.7 : **Théorème des gendarmes**
On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que :

H1 $v_n\leq u_n\leq w_n$ à partir d'un certain rang ;

H2 les deux suites encadrantes (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite l ;

alors la suite (u_n) converge vers l.
De même, si

H1 $v_n\leq u_n$ (à partir d'un certain rang) ;

H2 $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$;

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

Remarque 63. Le raisonnement suivant est faux.

- A partir d'un certain rang, $\alpha_n \leq u_n \leq \beta_n$.
- $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. En effet, pour appliquer le passage à la limite dans les inégalités, il faut déjà avoir montré que (u_n) converge. Le théorème des gendarmes, lui par contre, garantit la convergence de (u_n).

Conclusion : utilisez *correctement* les théorèmes du cours avec leurs hypothèses exactes.

Remarque 64. En pratique, pour montrer la convergence d'une suite vers une limite on utilise le théorème de majoration ou le théorème des gendarmes. On ne revient à la définition que lorsque c'est absolument nécessaire.

Exercice 9-4

Étudiez la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3 + k^2}$$

Exercice 9-5

On considère la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, comparez $\frac{1}{k}$ avec $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$

b) Montrez que $\frac{S_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

9.3 Théorèmes généraux sur les suites

Théorème 9.8 : Théorèmes généraux

Soit (u_n) une suite convergeant vers $l \in \mathbb{R}$ et (v_n) une suite convergeant vers $l' \in \mathbb{R}$. Alors

1. la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$;
2. la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l + l'$;
3. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λu_n) converge vers λl ;
4. la suite $(u_n v_n)$ converge vers ll' ;
5. Si $l' \neq 0$, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{l}{l'}$.

Exercice 9-6

Étudiez la suite de terme général $u_n = \frac{2n^2 + n - 1}{3n^2 + 1}$.

Exercice 9-7

Soit (u_n) une suite bornée et une suite (v_n) qui diverge vers $+\infty$. Montrez que

$$u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Exercice 9-8

Si (u_n) converge et (v_n) diverge, montrer que $(u_n + v_n)$ diverge.

9.4 Suites et séries géométriques

Théorème 9.9 : Convergence des suites géométriques
Soit $k \in \mathbb{R}$. On appelle *suite géométrique* de raison k, la suite définie par

$$\boxed{u_n = k^n}$$

Elle vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = ku_n$.

1. Si $|k| < 1$, alors la suite (u_n) converge vers 0 ;
2. Si $|k| > 1$, alors la suite (u_n) diverge ($|u_n| \to +\infty$) ;
3. Si $k = 1$, la suite (u_n) est constante et converge vers 1 ;
4. Si $k = -1$, la suite (u_n) diverge.

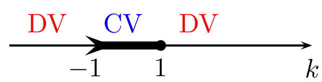


Fig. 9.3 – *Convergence des suites géométriques*

Définition 9.7 : Série géométrique
Soit un réel $k \in \mathbb{R}$. On définit la progression géométrique (ou série géométrique) de raison k. C'est la suite de terme général

$$S_n = 1 + k + \cdots + k^n = \sum_{i=0}^{n} k^i$$

Théorème 9.10 : Convergence d'une série géométrique
On calcule explicitement le terme général S_n :

$$\boxed{S_n = \begin{cases} \dfrac{1 - k^{n+1}}{1 - k} & \text{si } k \neq 1 \\ (n+1) & \text{si } k = 1 \end{cases}}$$

On obtient alors la convergence de la suite (S_n) :
Si $|k| < 1$, alors la suite (S_n) converge vers le réel $\dfrac{1}{1-k}$.
Si $|k| \geq 1$, alors la suite (S_n) diverge.

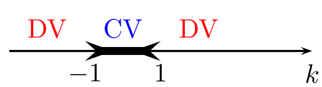


Fig. 9.4 – *Convergence des séries géométriques*

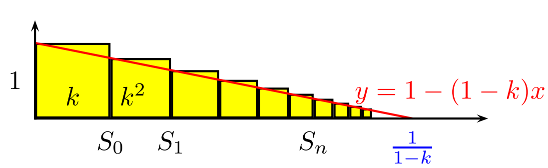


Fig. 9.5 – *Convergence d'une série géométrique* ($|k| < 1$)

Remarque 65. Les suites et séries géométriques sont très utilisées en analyse. On essaie souvent de majorer des suites par des suites géométriques dont on connaît bien le comportement.

9.5 Suites extraites

DÉFINITION 9.8 : **Suite extraite**
On dit qu'une suite (v_n) est une suite extraite d'une suite (u_n) s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ *strictement croissante* telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

`Exemple 15.` les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont extraites de la suite (u_n).

LEMME 9.11 :
Si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

THÉORÈME 9.12 : **Une suite extraite d'une suite convergente est convergente**
Toute suite extraite d'une suite convergeant vers une limite a est une suite convergeant vers a.

COROLLAIRE 9.13 : **Pour montrer qu'une suite diverge**
Soit une suite (u_n). On suppose qu'il existe deux suites extraites (v_n) et (w_n) de (u_n) telles que

- H1 (v_n) converge vers a ;
- H2 (w_n) converge vers b ;
- H3 $a \neq b$.

Alors la suite (u_n) est divergente

Exercice 9-9

Montrez que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, est une suite divergente.

THÉORÈME 9.14 :
Soit une suite (u_n). On suppose que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. Alors la suite (u_n) converge vers l.

Exercice 9-10

On considère une suite $(u_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrez que la suite (u_n) est convergente.

9.6 Suites monotones

THÉORÈME 9.15 : **Théorème de la limite monotone**
Soit (u_n) une suite *croissante*. On a les deux possibilités suivantes :

1. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) converge vers une limite finie ;
2. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

Remarque 66. Si (u_n) est croissante et majorée, elle converge vers la borne sup. des valeurs de (u_n) :

$$l = \sup\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$$

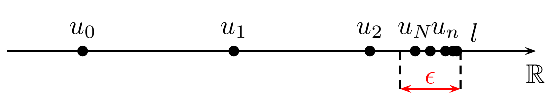


FIG. 9.6 – *Théorème de la limite monotone*

DÉFINITION 9.9 : **suites adjacentes**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit qu'elles sont *adjacentes* ssi

1. les deux suites sont monotones de sens contraire ;
2. La suite $(d_n) = (v_n - u_n)$ converge vers 0.

THÉORÈME 9.16 : **Convergence des suites adjacentes**
Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Remarque 67. Les théorèmes précédents permettent de montrer qu'une suite converge, même sans deviner sa limite !

Exercice 9-11

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Étudier alors la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 9-12

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$$

Exercice 9-13

On définit la suite (S_n) par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}$$

1. Calculer S_0,S_1,S_2,S_3 ;
2. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge ;
3. Si l est la limite de (S_n), majorer l'erreur $e_n = |S_n - l|$ en fonction de n ;
4. On décide de prendre la valeur S_n $(n \in \mathbb{N})$ comme valeur approchée de l à 10^{-2} près. En effet, grâce à une calculatrice, on calcule facilement S_n. Quelle valeur de n prendre ?

Exercice 9-14

Soit les suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

1. Montrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Montrez que leur limite commune est un nombre irrationnel (c'est le nombre de Neper $e = exp(1)$).

Corollaire 9.17 : **Théorème des segments emboîtés**

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments : $I_n = [a_n,b_n]$ tels que

H1 Ils sont emboîtés : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$;

H2 Leur diamètre tend vers 0 : $(b_n - a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors il existe un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{l\}$$

Théorème 9.18 : **Théorème de Bolzano-Weierstrass**

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Corollaire 9.19 :

Soit un segment $[a,b]$ et une suite (x_n) de points de ce segment. Alors il existe une suite extraite de la suite (x_n) qui converge vers un point $l \in [a,b]$.

Remarque 68. Vous verrez l'année prochaine la notion plus générale de partie *compacte* de $\mathbb{R}^n$. Les segments de $\mathbb{R}$ sont des parties compactes car fermées et bornées.

9.7 Etude de suites récurrentes.

Soit une fonction continue $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On peut définir une suite (u_n) par la donnée de son premier terme u_0 et d'une relation de récurrence de la forme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Remarque 69. On peut représenter graphiquement la suite (u_n) en utilisant des ricochets sur la première bissectrice.

Remarque 70. On verra plus tard que si la suite (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, alors forcément $\boxed{l = f(l)}$. Il est donc essentiel de chercher les *points fixes* de f (graphiquement les intersections du graphe de f avec la première bissectrice.

Exercice 9-15

Lorsque

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2+1} \end{cases}$$

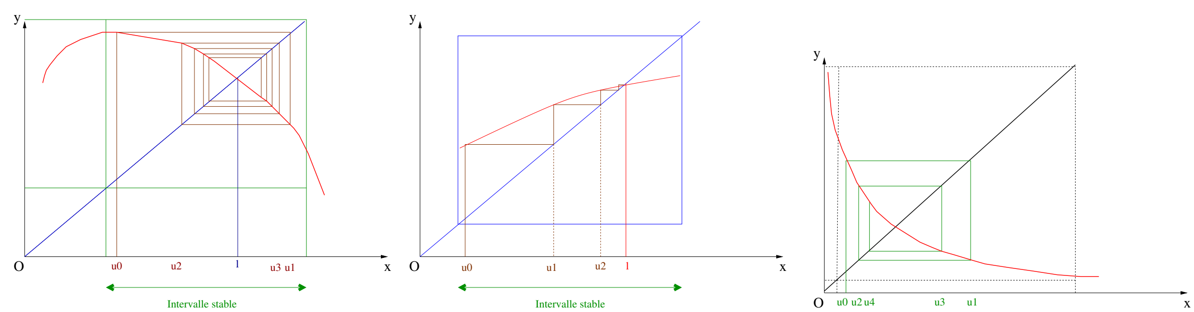
montrer que si (u_n) converge vers l, alors nécessairement $l = f(l)$.

DÉFINITION 9.10 : **intervalles stables**
Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que J est stable par f ssi $f(J) \subset J$.

THÉORÈME 9.20 : **La suite reste dans J**
Si J est un intervalle *stable*, et $u_0 \in J$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.

L'étude d'une suite récurrente générale est très difficile et fait même l'objet de certaines recherches de nos jours ! Par contre, nous savons étudier une telle suite dans deux cas particuliers :

1. f est *croissante* sur un intervalle *stable* I et $u_0 \in I$;
2. f est *décroissante* sur un intervalle *stable* J avec $u_0 \in J$.



(a) Intervalle stable

(b) f croissante sur un intervalle stable

(c) f décroissante sur un intervalle stable

FIG. 9.7 – *Suites récurrentes*

9.7.1 La fonction f est croissante sur un intervalle stable

THÉORÈME 9.21 : **(u_n) est monotone**
Lorsque f est croissante sur un intervalle stable J et $u_0 \in J$, alors (u_n) est monotone :

1. Si $u_0 \le f(u_0)$, alors (u_n) est croissante ;
2. Si $f(u_0) \le u_0$, alors (u_n) est décroissante.

Ce théorème et le théorème de la limite monotone permettent de conclure sur la nature de la suite (u_n).

Remarque 71. Il est intéressant d'introduire la fonction

$$\theta(x) = f(x) - x$$

et de dresser son tableau de signe :

- Les zéros de θ sont les points fixes de f ;
- Le signe de $\theta(u_0)$ dit si (u_n) et croissante ou décroissante.

Remarque 72. Il est très important de s'inspirer du graphique pour deviner le comportement de la suite avant de démontrer quoi que ce soit.

Exercice 9-16

Soit un réel positif $u_0 \ge 0$. Étudier en fonction de u_0 la suite récurrente définie par

$$u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$$

Exercice 9-17

Soit $u_0 \geq 0$. Étudier la suite récurrente définie par

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n^2 + 1}$$

9.7.2 La fonction f est décroissante sur un intervalle stable

Ce cas est plus compliqué, mais si l'on remarque que les deux suites extraites

$$(v_n) = (u_{2n}), \quad (w_n) = (u_{2n+1})$$

vérifient la relation de récurrence

$$v_0 = u_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f \circ f(v_n)$$

$$w_0 = u_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = f \circ f(w_n)$$

et que la fonction $g = f \circ f$ est *croissante*, on se ramène alors au cas précédent. Les suites (v_n) et (w_n) sont monotones de sens contraire. Si ces deux suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite l, alors la suite (u_n) converge vers cette même limite l. Sinon, la suite (u_n) diverge.

Exercice 9-18

Étudier la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 - u_n^2$$

9.7.3 Quelques relations de récurrences classiques

Suites arithmétiques

Théorème 9.22 : **Suites arithmétiques**
On considère une suite de réels (u_n) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + a$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un réel $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = C + an$.

Suites géométriques

Théorème 9.23 : **Suites géométriques**
On considère une suite de réels (u_n) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = ku_n$$

où $k \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un réel $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = Ck^n$.

Suites arithmético-géométriques

Théorème 9.24 : **Suites arithmético-géométriques**
On considère une suite de réels (u_n) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = ku_n + a$$

où $k \neq 1$ et $a \neq 0$. Alors, il existe deux réels $C_1 \in \mathbb{R}$ et $C_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = C_1 + C_2 k^n$.

Remarque 73. Pour résoudre une récurrence arithmético-géométrique, commencer par trouver un point fixe $\alpha = k\alpha + a$ et introduire la suite $(v_n) = (u_n - a)$, qui vérifie une récurrence géométrique.

Exercice 9-19

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 2^n$$

Déterminez pour $n \in \mathbb{N}$, u_n.

Exercice 9-20

On considère un réel $a > 0$ et la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Bigl(u_n + \dfrac{a}{u_n}\Bigr) \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et qu'elle converge vers $\sqrt{a}$.
2. On note $e_n = |u_n - \sqrt{a}|$ l'erreur commise en approximant $\sqrt{a}$ par u_n. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$e_{n+1} \leq C e_n^2$$
On dit que la convergence est *quadratique*.
3. Si u_n est une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à 10^{-p} près, que peut-on dire de u_{n+1} ?
4. On prend $a = 2$ et $u_0 \geq \sqrt{2}$ tel que $u_0 - \sqrt{2} \leq 1$. Majorer explicitement e_n en fonction de n. Quelle valeur de n suffit-il de choisir pour que u_n soit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-p} près ?

9.8 Suites complexes

Définition 9.11 : **Convergence d'une suite de complexes**
On dit qu'une suite de nombres complexes (z_n) converge vers un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ si et seulement si la suite réelle $|z_n - a|$ converge vers 0.
On dit que la suite (z_n) diverge vers l'infini lorsque la suite réelle $|z_n|$ diverge vers $+\infty$.

Remarque 74. Une autre façon de dire que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$:

$$\forall r > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N,\ z_n \in D(a,r)$$

Remarque 75. Toutes les propriétés démontrées sur les suites réelles *ne faisant pas intervenir d'inégalités* sont encore valables pour les suites complexes (les démonstrations n'utilisent que l'inégalité triangulaire). En particulier, on a les théorèmes généraux sur les sommes, produits, quotients, l'unicité de la limite, une suite convergente est bornée. On ne dispose plus par contre du passage à la limite dans les inégalités, du théorème de la limite monotone, ni du théorème des gendarmes. Le théorème suivant permet de montrer qu'une suite de complexes converge vers une limite.

Théorème 9.25 : **Théorème de majoration**
Soit (z_n) une suite de complexes et $a \in \mathbb{C}$. Si (α_n) est une suite de réels vérifiant :
1. $|z_n - a| \leq \alpha_n$ à partir d'un certain rang ;
2. $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;

Alors $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Une autre façon d'étudier une suite complexe consiste à étudier deux suites réelles :

Théorème 9.26 : **La convergence d'une suite complexe correspond à la convergence des parties réelles et imaginaires**

$$\Bigl(z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a\Bigr) \iff \left(\begin{cases} \mathrm{Re}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(a) \\ \mathrm{Im}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(a) \end{cases}\right)$$

THÉORÈME 9.27 : Suites géométriques complexes
Soit un nombre complexe $k \in \mathbb{C}$. On appelle *suite géométrique* de raison k, la suite définie par $z_n = k^n$. Elle vérifie la relation de récurrence $z_{n+1} = kz_n$.

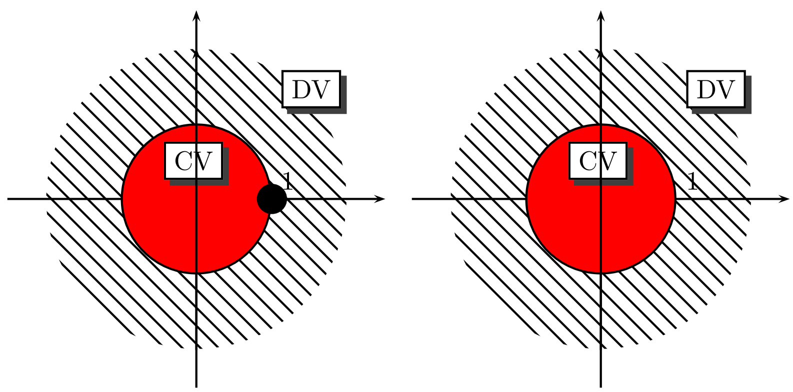
1. $|k| < 1 \Rightarrow (z_n)$ converge vers 0.
2. $|k| \geq 1$ et $z \neq 1 \Rightarrow (z_n)$ diverge.
3. $k = 1 \Rightarrow (z_n)$ est constante et vaut 1.

Remarque 76. Pour montrer la divergence lorsque $|k| = 1$ et $k \neq 1$, on utilise la relation $z_{n+1} = kz_n$.

THÉORÈME 9.28 : Séries géométriques complexes
On appelle série géométrique de raison k, la suite complexe définie par :

$$S_n = 1 + k + \cdots + k^n = \sum_{i=0}^{n} k^i$$

1. $|k| < 1 \Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1-k}$
2. $|k| \geq 1 \Rightarrow (S_n)$ diverge.



(a) Convergence d'une suite géométrique complexe

(b) Convergence d'une série géométrique complexe

FIG. 9.8 – *Suites et séries géométriques complexe*

9.9 Relations de comparaison

DÉFINITION 9.12 : Notations de Landau Soient deux suites (u_n) et (v_n). On dit que

– la suite (u_n) est *négligeable* devant la suite (v_n) et l'on note $u_n = o(v_n)$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N,\ |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

si la suite (v_n) ne s'annule pas, c'est équivalent à dire que

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

– la suite (u_n) est *dominée* par la suite (v_n) et l'on note $u_n = O(v_n)$ lorsque

$$\exists M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N,\ |u_n| \leq M|v_n|$$

si la suite (v_n) ne s'annule pas, c'est équivalent à dire que la suite (u_n/v_n) est bornée.

Définition 9.13 : Suites équivalentes
On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes lorsque

$$u_n - v_n = o(v_n)$$

Lorsque la suite (v_n) ne s'annule pas, cela revient à dire que :

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Pour montrer que $u_n \sim v_n$, on montre que :
$\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$
ou que $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \to 0$
ou alors que $u_n = v_n + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = o(v_n)$.

Remarque 77. Attention, ne jamais écrire $u_n \sim 0$. Cela signifie en fait que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.

`Exemple 16.` $u_n = \dfrac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0} \sim \dfrac{a_p}{b_q} n^{p-q}$ (si $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$).

Théorème 9.29 : Produit, quotient d'équivalents
Soient quatre suites (u_n), (a_n) et (v_n), (b_n) vérifiant $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$ alors

1. $u_n v_n \sim a_n b_n$;
2. $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{a_n}{b_n}$ (si v_n et b_n ne s'annulent pas) ;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \sim a_n^\alpha$ (pour des suites à termes positifs).

Remarque 78. Dans le théorème précédent, le réel α ne dépend pas de n.
`Exemple 17.` $u_n = n^3 + n$, $v_n = -n^3 + n^2$, $u_n \sim n^3$, $v_n \sim -n^3$, $(u_n + v_n) \sim n^2$
`Exemple 18.` $u_n = n^2 + n$, $v_n = n^2$. On a $u_n \sim v_n$ mais $e^{u_n} \not\sim e^{v_n}$
`Exemple 19.` $u_n = 1 + 1/n$, $v_n = 1$, $u_n \sim v_n$ mais $\ln u_n \not\sim \ln v_n$.

On peut prendre des produits-quotients d'équivalents, mais ne jamais prendre de somme, d'exponentielle ou de logarithme d'équivalents

Théorème 9.30 : Equivalents et limite

1. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$;
2. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $\boxed{l \neq 0}$, alors $u_n \sim l$.

Théorème 9.31 : Un équivalent simple permet d'obtenir le signe d'une suite
Si deux suites sont équivalentes : $u_n \sim v_n$ alors, à partir d'un certain rang, les termes des deux suites ont même signe :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \quad u_n \times v_n \geq 0$$

Théorème 9.32 : Comparaison logarithmique

1. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes strictement positifs et si, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ alors $u_n = O(v_n)$.
2. Si (u_n) est une suite à termes positifs,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l < 1 \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l > 1 \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Théorème 9.33 : comparaison des suites usuelles
Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $k > 1$ alors

$$\boxed{(\ln n)^\beta = o(n^\alpha) \quad n^\alpha = o(k^n) \quad k^n = o(n!)}$$

Remarque 79. Montrez d'abord $a_n = \dfrac{k^n}{n!} \to 0$, et former $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Ensuite, $b_n = \dfrac{n^\alpha}{k^n} \to 0$, former $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

$$c_n = \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = \left(\frac{\ln n}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\ln n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$$

Un équivalent simple s'écrit comme un *produit-quotient* de suites de références. Par exemple,

$$\frac{\sqrt{2\pi n}}{2^{n^2}},\ \frac{n^3\ln^2 n}{3^n},\ldots$$

Par contre, les suites à gauche suivantes ne sont pas des équivalents simples, il faut chercher des équivalents plus simples. :

$$\frac{1}{\pi(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n},\ e^{n^2+n+1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^2}\times e^n,\ \ln(n^2+n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln n$$

On ne peut pas supprimer les constantes multiplicatives dans les équivalents !

$$2(n^2+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^2,\ \frac{\pi n^2+3n}{4\times 3^n - 2\times 2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}\frac{n^2}{3^n}$$

Exercice 9-21

Trouvez un équivalent simple des suites de terme général

1. $\dfrac{e^n+n!}{n+1}$;
2. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;
3. $\dfrac{e^n+e^{-n}+n}{\sqrt{n^2+n}-n}$;
4. $\dfrac{\ln n+n!}{n^2+(n+1)!}$;
5. $e^{n^2+n!+\frac{1}{n}}$;
6. $\ln(n^2+3^n)-\ln(5n^2+4^n)$.

Nous admettons pour l'instant les équivalents classiques suivants :

Théorème 9.34 : **Equivalents usuels**

Soit (u_n) une suite telle que $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$. Alors

1. $\sin u_n \sim u_n$
2. $\tan u_n \sim u_n$
3. $\ln(1+u_n) \sim u_n$
4. $[1-\cos u_n] \sim \dfrac{u_n^2}{2}$
5. $[e^{u_n}-1] \sim u_n$
6. $[(1+u_n)^\alpha - 1] \sim \alpha u_n$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$

Remarque 80. $\cos\frac{1}{n} \sim 1$, $\cos\frac{1}{n} \sim 1+\frac{1}{n}$, $\cos\frac{1}{n} \sim 1-\frac{1}{n^2}\ldots$ C'est vrai, mais seul le terme principal 1 joue un rôle !

Lorsqu'une suite se présente sous la forme

$$u_n = a_n^{b_n}$$

l'écrire sous la forme

$$u_n = e^{b_n\ln(a_n)}$$

Exercice 9-22

Trouvez la limite des suites de terme général $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Remarque 81. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $u_n^{v_n}$ ne tend pas forcément vers 1: c'est une forme indéterminée 1^∞ !

Exercice 9-23

Etudiez les suites de terme général

1. $\sin[\tan(\ln(n+1)-\ln n)]$;
2. $\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^4\sin\frac{1}{n^2}}$;
3. $\dfrac{\sqrt{\cos\frac{1}{n}}-1}{\ln(n+1)-\ln n}$;
4. $\dfrac{e^{\sin\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1+e^{-n}}}{1-\cos e^{-n}}\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$.

9.9.1 Recherche pratique d'équivalents

Recherche d'un équivalent d'une somme

Si $u_n = a_n + b_n$, avec $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. Chercher un équivalent simple des suites (a_n) et (b_n) : $a_n \sim \alpha_n$ et $b_n \sim \beta_n$;
2. (a) Si les deux équivalents ne sont pas du même ordre de grandeur, par exemple $\alpha_n = o(\beta_n)$, montrer que $a_n = o(b_n)$ en formant le quotient a_n/b_n. Alors $u_n \sim b_n \sim \beta_n$.
   (b) Si les deux équivalents sont « comparables », et si formellement $\alpha_n + \beta_n \neq 0$, montrer que $u_n \sim (\alpha_n + \beta_n)$ en formant le quotient $u_n/(\alpha_n + \beta_n)$.
   (c) Si la somme formelle des équivalents vaut 0, réécrire u_n en essayant de faire apparaître les équivalents usuels.

Exercice 9-24

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \ln(1+1/n^2) + \sin(1/n)$$

Exercice 9-25

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \ln(1+1/n) + \sin(2/n)$$

Exercice 9-26

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \sqrt{\cos(1/n)} - e^{\sin(1/n^2)}$$

Exercice 9-27

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \cos\Big(\ln\big(\big(1+\sin(1/n)\big)\big)\Big) - e^{\sin(1/n)}$$

Recherche d'un équivalent d'un logarithme

Si $u_n = \ln(v_n)$, avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$,

1. Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l > 0$ avec $l \neq 1$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l) \neq 0$ et donc $u_n \sim \ln(l)$;
2. Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ou alors si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$, et si $v_n \sim \beta_n$, montrer que $u_n \sim \ln(\beta_n)$;
3. Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, écrire
$$u_n = \ln\big(1 + (v_n - 1)\big)$$
et utiliser l'équivalent usuel du logarithme.

Exercice 9-28

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \ln(n^2 + 2^n)$$

Exercice 9-29

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \ln(n^2 + 3) - \ln(n^2 + 1/n)$$

Exercice 9-30

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \ln\Big(\frac{en^2 + 1}{n^2 + n}\Big) - \cos(1/n)$$
