Chapitre 24

Propriétés métriques des courbes planes

24.1 Rectification des courbes planes.

Dans ce chapitre, on considère un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$, $(I,\overrightarrow{F})$ où $I = [a,b]$ et $\overrightarrow{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \overrightarrow{F}(t) \end{array} \right.$ *sans point stationnaire* :

$$\forall t \in I, \quad \overrightarrow{F}'(t) \neq 0$$

Définition 24.1 : **$\mathcal{C}^1$ difféomorphisme**
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ t & \mapsto & s = \phi(t) \end{array} \right.$$

On dit que ϕ est un *difféomorphisme* de I vers J lorsque :

1. ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
2. ϕ est bijective ;
3. ϕ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.

Définition 24.2 : **Paramétrages admissibles**
Soit une fonction $\overrightarrow{F} : I \mapsto \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\phi : J \mapsto I$. On lui associe la fonction

$$\overrightarrow{G} : \left\{ \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & \overrightarrow{F}\big(\phi(s)\big) \end{array} \right.$$

Alors le support des arcs paramétrés $(I,\overrightarrow{F})$ et $(J,\overrightarrow{G})$ sont égaux. On dit que ϕ définit un changement de paramétrage admissible.

Remarque 265. Un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme est une application $\phi \in \mathcal{C}^1(I,J)$ strictement croissante ou strictement décroissante. Selon les variations de ϕ, cela permet de définir l'orientation sur l'arc γ.

Remarque 266. Cette définition permet de conserver les propriétés géométriques de la courbe, en particulier, si $M(t) = 0 + \overrightarrow{F}(t)$ est un point stationnaire de $\gamma = (I,\overrightarrow{F})$, le point correspondant $M(s) = O + \overrightarrow{G}(s)$ est un point stationnaire de l'arc $\gamma' = (J,\overrightarrow{G})$. En effet,

$$\overrightarrow{G}'(s) = \underbrace{\phi'(s)}_{\neq 0} \overrightarrow{F}\big(\phi(s)\big)$$

24.1.1 Notations différentielles

Soit alors $t \in I$, et $s = \phi(t) \in J$. On note

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \phi'(t) \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = (\phi^{-1})'(s)$$

En utilisant la dérivée d'une fonction réciproque :

$$(\phi^{-1})'(s) = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(s))} = \frac{1}{\phi'(t)} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}}$$

Soit maintenant deux fonctions vectorielles définissant deux arcs paramétrés $\mathcal{C}^k$ équivalents ($k \geq 2$) :

$$\overrightarrow{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & F(t) \end{array} \right. \qquad G : \left\{ \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & F(\phi^{-1}(s)) \end{array} \right.$$

On notera $M(s) = O + \overrightarrow{G}(s) = O + \overrightarrow{F}(t) = M(t)$ si $\phi(t) = s$ et

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F'}(t) \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{G'}(s)$$

Alors par le calcul de la dérivée d'une fonction composée,

$$\overrightarrow{G}(s) = \overrightarrow{F}(\phi^{-1}(s)) \Rightarrow \overrightarrow{G'}(s) = (\phi^{-1})'(s)\overrightarrow{F'}(\phi^{-1}(s)) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}\overrightarrow{F'}(t)$$

et avec les notations différentielles, on a donc :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}$$

24.1.2 Abscisse curviligne, longueur

DÉFINITION 24.3 : **Repère de Frenet** [a]
Soit $M = O + \overrightarrow{F}(t)$ un point régulier d'un arc paramétré $(I, \overrightarrow{F})$. On définit le *vecteur tangente unitaire* au point M par $\overrightarrow{T} = \dfrac{\overrightarrow{F'}(t)}{\|\overrightarrow{F'}(t)\|}$ et on définit le *vecteur normale unitaire* comme étant le vecteur unitaire $\overrightarrow{N}$ faisant un angle orienté de $+\dfrac{\pi}{2}$ avec le vecteur $\overrightarrow{T}$. On appelle *repère de Frenet* au point M, le repère $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$.

[a] Jean Frenet : (07/02/1816-12/06/1900), Français. Célèbre pour les formules de Frénet, démontrées dans sa thèse. Il fut professeur à Toulouse

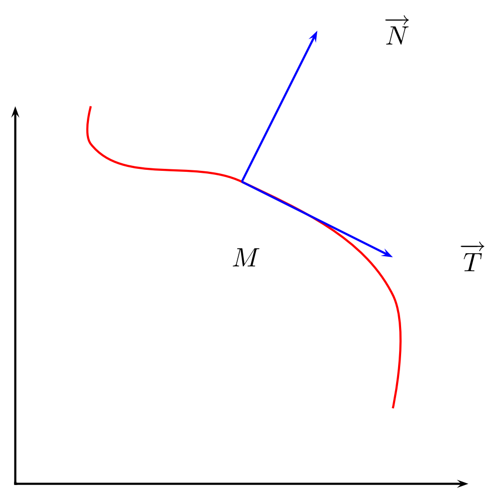

FIG. 24.1 – *Repère de Frenet*

Définition 24.4 : **Abscisse curviligne**

On appelle abscisse curviligne sur un arc paramétré $(I,\overrightarrow{F})$, toute fonction $s : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ t & \mapsto & s(t) \end{array} \right.$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in I$,

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = \|\overrightarrow{F'}(t)\|}$$

Pour un paramètre $t_0 \in I$, on appelle abscisse curviligne d'origine $M(t_0)$, la fonction définie par

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\overrightarrow{F'}(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Remarque 267. Si l'on suppose qu'entre les instants t_0 et t, la vitesse de parcours du mobile est constante et vaut $v > 0$, alors $s(t) = (t - t_0)v$ et donc $s(t)$ représente la longueur parcourue sur la courbe par le mobile entre les instants t_0 et t.

Remarque 268. Pour une courbe polaire $\rho = \rho(\theta)$, $f'(\theta) = \rho'(\theta)\overrightarrow{u} + \rho(\theta)\overrightarrow{v}$ d'où $s'(\theta) = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}$ (car la base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est orthonormale.

Remarque 269. Pour une courbe $y = f(x)$, on peut la paramétrer en posant $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$ et alors

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$$

Remarque 270. Comme la courbe est sans point stationnaire, $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\overrightarrow{F'(t)}\| \neq 0$ et donc s réalise une bijection de I vers un intervalle J et c'est un difféomorphisme. Alors si l'on note $s = s(t)$, et $M = M(t) = M(s)$ un point de la courbe, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s}\| = \frac{\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\|}{|\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}|} = 1$$

Donc l'intérêt de choisir l'abscisse curviligne comme paramétrage de la courbe est que la courbe est parcourue à vitesse constante 1 et que s à une signification géométrique : la longueur de l'arc parcourue entre $M(s_0)$ et $M(s)$ vaut $s - s_0$. De plus, le vecteur tangente unitaire au point $M(s)$ vaut

$$\boxed{\overrightarrow{T} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s}}$$

Remarque 271. *Rectifier* la courbe, c'est déterminer une abscisse curviligne.

Définition 24.5 : **Longueur d'un arc paramétré**

On appelle longueur de l'arc paramétré $\Gamma = ([a,b],\overrightarrow{F})$, le réel

$$\boxed{L(\Gamma) = \int_a^b \|\overrightarrow{F'(t)}\| dt}$$

Théorème 24.1 : **La définition de longueur d'un arc est indépendante du paramétrage**

Si $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & [\alpha,\beta] \\ t & \mapsto & u = \phi(t) \end{array} \right.$ est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme ($k \geq 1$), et si $\overrightarrow{G}$: $\left\{ \begin{array}{ccc} [\alpha,\beta] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto & \overrightarrow{F}(\phi(u)) \end{array} \right.$ est un autre paramétrage admissible de la courbe, alors

$$L(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \|\overrightarrow{G'}(u)\| \, \mathrm{d}u$$

Remarque 272. Si $s(t)$ est une abscisse curviligne sur Γ, alors $L(\gamma) = s(b) - s(a)$.

Exercice 24-1

Calculer la longeur de l'astroïde :

$$x(t) = a\cos^3 t \quad y(t) = a\sin^3 t \quad t \in [0,2\pi]$$

Exercice 24-2

Calculer la longueur d'un arc de parabole

$$y = ax^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Exercice 24-3

Calculer la longueur de la cardioïde

$$\rho = a(1 + \cos\theta), \theta \in [0, 2\pi]$$

Exercice 24-4

Calculer la longueur d'une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

On tombe sur une *intégrale elliptique* que l'on ne sait pas calculer. Que vaut cette intégrale si $a = b$?

24.1.3 Courbure

Théorème 24.2 : **Théorème de relèvement**

1. Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ t & \mapsto & g(t) \end{array} \right.$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I. Il existe une fonction $\theta : I \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $\forall t \in I$, $g(t) = e^{i\theta(t)}$.
2. Si $\overrightarrow{F}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et si $k \geq 2$ alors, il existe une fonction α de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I telle que, pour tout t de I,

$$\overrightarrow{T}(t) = \cos\alpha(t)\overrightarrow{e_1} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{e_2}.$$

On a alors les relations $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha$.

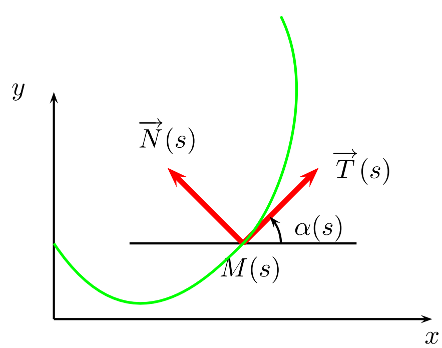

Fig. 24.2 – *L'angle* α

Définition 24.6 : **Courbure**

On définit la courbure d'un arc $(I, \overrightarrow{F})$ au point $M(s)$ par

$$\boxed{c(s) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}}$$

où s est une abscisse curviligne. Si $c \neq 0$, l'inverse de la courbure au point $M(s)$, $r = \dfrac{1}{c}$ est appelé rayon de courbure de l'arc au point $M(s)$.

THÉORÈME 24.3 : **Formules de Frenet**
Pour un arc paramétré $\gamma = (I,\overrightarrow{F})$ de classe $\mathcal{C}^2$,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = c\overrightarrow{N},\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -c\overrightarrow{T}}$$

24.1.4 Calcul pratique de la courbure

1. Pour un arc paramétré $\gamma = (I,\overrightarrow{F})$, avec $\overrightarrow{F}(t)\begin{vmatrix}x(t)\\ y(t)\end{vmatrix}$:

   (a) Rectification :

   $$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\overrightarrow{F'}(t)\|$$

   (b)

   $$c = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}$$

   (c)

   $$\tan\alpha = \frac{y'}{x'}$$

   que l'on essaie de mettre sous la forme $\tan f(t)$;

   (d) sinon on dérive :

   $$(1+\tan^2\alpha)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{y''x' - y'x''}{{x'}^2}$$

   (e) Expression finale de la courbure (ne pas l'apprendre par coeur) :

   $$c(t) = \frac{\left[\overrightarrow{F'}(t),\overrightarrow{F''}(t)\right]}{\|\overrightarrow{F'}(t)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix}x'(t) & x''(t)\\ y'(t) & y''(t)\end{vmatrix}}{\left({x'}^2(t)+{y'}^2(t)\right)^{3/2}}$$

2. Pour une courbe polaire $\rho = \rho(\theta)$:

   (a) Rectification :

   $$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}$$

   (b) L'angle α :
   Si V désigne l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{u}(\theta)$ et le vecteur tangente unitaire $\overrightarrow{T(\theta)}$,

   $$\alpha = \theta + V$$

   De la relation

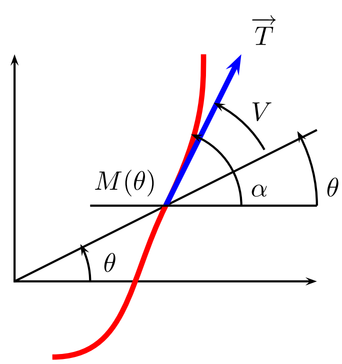

FIG. 24.3 – $\alpha = \theta + V$

$$\tan V(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$$

que l'on essaie de mettre sous la forme $\tan g(\theta)$. Sinon, en dérivant on trouve $\dfrac{dV}{d\theta}$, et alors

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta}$$

(c) Courbure :

$$c(\theta) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{d\theta} \times \frac{1}{\dfrac{ds}{d\theta}}$$

(d) Expression finale de la courbure au point $M(\theta)$ (ne pas l'apprendre par coeur) :

$$c(\theta) = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

3. Pour une courbe $y = f(x)$:

(a) Rectification :

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'^2(x)}$$

(b) L'angle α :

$$\tan \alpha(x) = y'(x)$$

(c) Courbure :

$$c(x) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx} \times \frac{dx}{ds}$$

(d) Expression finale de la courbure au point $M(x)$ (ne pas l'apprendre par coeur) :

$$c(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{3/2}}$$

Exercice 24-5

Calculer la courbure en un point régulier de l'astroïde

$$x(t) = a\cos^3 t, \quad y(t) = a\sin^3 t$$

Exercice 24-6

Calculer la courbure en un point de la cardioïde

$$\rho = a(1 + \cos\theta)$$

et de la spirale logarithmique

$$\rho = ae^{m\theta}$$

Exercice 24-7

a) On considère la chaînette d'équation $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$. Déterminer la longueur d'un arc de la chaînette entre $(0,1)$ et $(l, a \operatorname{ch} l)$.
b) Déterminer le rayon de courbure en un point de la chaînette. Où est-il minimal ?

THÉORÈME 24.4 : **Calcul des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet**
On pose $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ on a alors

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = v\overrightarrow{T}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{N}}$$

24.2 Centre de courbure

Définition 24.7 : **Centre de courbure** On appelle *centre de courbure* en un point M d'un arc paramétré Γ, le point I défini par

$$\boxed{I = M + r.\overrightarrow{N}}$$

où r est le rayon de courbure au point M et $\overrightarrow{N}$ le vecteur tangente unitaire au point M. On appelle *cercle de courbure*, le cercle de centre I et de rayon r. On montre que c'est le cercle qui « colle » le mieux à la courbe au point M.

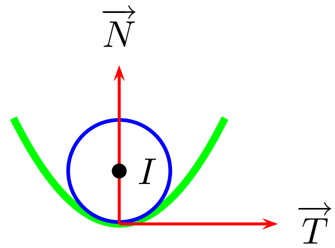

Fig. 24.4 – *Centre de courbure*

Pour calculer en pratique le centre de courbure, on commence par exprimer le vecteur tangente unitaire au point M :

$$\overrightarrow{T} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s} = \left| \begin{matrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \end{matrix} \right. = \left| \begin{matrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{matrix} \right.$$

d'où l'on déduit l'expression du vecteur normale unitaire au point M :

$$\overrightarrow{N} = \left| \begin{matrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{matrix} \right. = \left| \begin{matrix} -\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \end{matrix} \right.$$

Par conséquent, en notant $I \left| \begin{matrix} x_I \\ y_I \end{matrix} \right.$ et puisque $r = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}$, on tire :

$$\begin{cases} x_I = x_M - \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} \times \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = x_M - \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} \times \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ y_I = y_M + \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} \times \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = y_M + \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} \times \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

Il suffit donc d'exprimer $\tan\alpha = \dfrac{dx/dt}{dy/dt}$ et de dériver pour trouver $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$ et de reporter dans les formules précédentes pour obtenir les coordonnées du point I.

Exercice 24-8

On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation

$$(\mathcal{P}) : y^2 = 2px \quad (p > 0)$$

Soit $M \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$ un point de cette parabole. On note N l'intersection de la normale en M à la parabole avec l'axe (Ox). Soit $\mathcal{D}$ la parallèle à la tangente à la parabole au point M passant par le point N. On note Q l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec la parallèle à (Ox) passant par M. Montrer que le centre de courbure I au point M et le point Q ont même abscisse.