Chapitre 22

Produit scalaire

22.1 Définitions et règles de calcul

DÉFINITION 22.1 : **produit scalaire**
Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On appelle *produit scalaire* sur E, une application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x \mid y) \end{array} \right.$$

vérifiant :
1. ϕ est une *forme bilinéaire* : $\forall (x,y,z) \in E^3, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\phi(\lambda x + \mu y,z) = \lambda\phi(x,z) + \mu\phi(y,z)$$
$$\phi(x,\lambda y + \mu z) = \lambda\phi(x,y) + \mu\phi(y,z)$$

2. ϕ est *symétrique* :
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \phi(x,y) = \phi(y,x)$$

3. ϕ est *définie* :
$$\forall x \in E, \quad (\phi(x,x) = 0) \Longleftrightarrow (x = 0)$$

4. ϕ est *positive* :
$$\forall x \in E, \quad \phi(x,x) \geq 0$$

On dit alors que E muni d'un produit scalaire est un *espace préhilbertien réel*. Si E est de dimension finie, on dit que E est un *espace euclidien*.
On note $(x \mid y) = \phi(x,y)$ le produit scalaire. En géométrie, on utilise également la notation $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}$.
On définit la *norme* associée à un produit scalaire : Si $x \in E$,

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}}$$

- Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$: Si $X = (x_1,\dots,x_n), Y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(X \mid Y) = x_1y_1 + \dots x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- Sur l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$, $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $f,g \in E$

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$$

– Sur l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues et 2π-périodiques, $E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$, $f,g \in E$

$$(f \mid g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(t)dt}$$

Théorème 22.1 : **Règles de calcul**
Pour deux vecteurs $(x,y) \in E^2$, et un réel $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $\|\lambda.x\| = |\lambda|\|x\|$;
- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,(x \mid y) + \|y\|^2$;
- $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,(x \mid y) + \|y\|^2$;
- $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (égalité du parallélogramme) ;
- $(x \mid y) = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ (identité de polarisation).

Pour des vecteurs $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n \in E$ et des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_n \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \sum_{j=1}^n \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j\,(x_i \mid y_j)$$

$$\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \lambda_i\lambda_j\,(x_i \mid x_j)$$

Théorème 22.2 : **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
Soient x,y deux vecteurs,

$$\boxed{|(x \mid y)| \le \|x\|\|y\|}$$

Avec égalité ssi les deux vecteurs sont proportionnels : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $y = \lambda x$ (ou $x = \lambda y$).

Théorème 22.3 : **Inégalité de Minkowski**
Soient x,y deux vecteurs.

$$\boxed{\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \le \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|}$$

avec égalité dans la majoration de droite si et seulement si les deux vecteurs se trouvent sur une même demi-droite issue de l'origine : $\exists \lambda \ge 0$ tq $y = \lambda x$

22.2 Orthogonalité

On considère un espace préhilbertien réel $(E, (. \mid .))$.

Définition 22.2 : **Vecteurs orthogonaux**
Deux vecteurs x et y sont dits *orthogonaux* lorsque $(x \mid y) = 0$.

Théorème 22.4 : **Identité de Pythagore**
Soient deux vecteurs de E. Alors

$$(x \mid y) = 0 \Longleftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Théorème 22.5 : **Des vecteurs orthogonaux 2 à 2 forment un système libre**
Soit $S = (x_1,\dots,x_n)$ un système de vecteurs non-nuls deux à deux orthogonaux :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \ne j \Rightarrow (x_i \mid x_j) = 0$$

Alors le système S est libre.

Définition 22.3 : **Sous-espaces orthogonaux**
Soient F et G deux sev de E. On dit qu'ils sont orthogonaux ssi

$$\forall x \in F, \forall y \in G, \quad (x \mid y) = 0$$

Définition 22.4 : **orthogonal d'une partie**
Soit $A \subset E$ une partie de E. On définit l'orthogonal de A par :

$$A^{\perp} = \{x \in E \text{ tq } \forall a \in A, (x \mid a) = 0\}$$

Théorème 22.6 : **Propriétés de l'orthogonal**
Soient $A,B \subset E$ deux parties de E.
a) $A^{\perp}$ est un sev de E.
b) $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$
c) $A^{\perp} = [\text{Vect}(A)]^{\perp}$
d) $A \subset [A^{\perp}]^{\perp}$

22.3 Espaces euclidiens

Définition 22.5 : **Espaces euclidiens**
Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire

On considère désormais des espaces de dimension finie.

Définition 22.6 : **bases orthogonales, orthonormales**
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On dit que e est une base
1. *orthogonale* si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow (e_i \mid e_j) = 0$;
2. *orthonormale* si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(e_i \mid e_j) = \delta_{ij}$.

Remarque 230. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire usuel.

Théorème 22.7 : **Calculs dans une bon**
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une bon de E.
1. Les coordonnées d'un vecteur dans une bon sont des produits scalaires :
$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)\, e_i$$
2. Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, alors
$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$
3. Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,
$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

Théorème 22.8 : **Théorème de Schmidt**[a]
Soit (E,n) euclidien et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque de E. Alors il existe une base *orthonormale* $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ de E vérifiant :
1. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\epsilon_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$;
2. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(e_i \mid \epsilon_i) > 0$.

[a] Erhard Schmidt, (13/01/1876-06/12/1959), Allemand. Un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle

Remarque 231. L'algorithme de construction de la bon est aussi important que l'énoncé du théorème.
Remarque 232. La matrice de passage de e vers ϵ est triangulaire supérieure.

Exercice 22-1
Soit l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soient les vecteurs $e_1 = (2,0,0)$, $e_2 = (1,1,1)$ et $e_3 = (0,1,2)$. Construire une bon à partir de $e = (e_1,e_2,e_3)$.

Exercice 22-2
Soit l'espace $E = \mathbb{R}_1[X]$ muni du produit scalaire

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

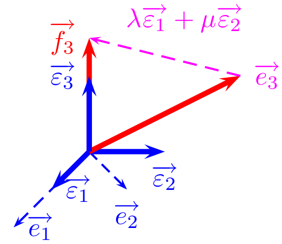


FIG. 22.1 – *Algorithme de Schmidt : redressement de* e_3

a) Montrer que $(. \mid .)$ définit un produit scalaire sur E

b) Trouver une bon ε de E

c) Trouver les coordonnées du vecteur $P = X + 1$ dans ε.

COROLLAIRE 22.9 : **Existence d'une bon**
Tout espace euclidien $E \neq \{0_E\}$ possède une bon.

THÉORÈME 22.10 : **Propriétés de l'orthogonal en dimension finie**
Soit F un sev de E de dimension p. Alors

1. $\dim F^\perp = n - p$
2. $E = F \oplus F^\perp$
3. $\left(F^\perp\right)^\perp = F$

THÉORÈME 22.11 : **Théorème de Riesz**
Soit $f \in E^\star$ une forme linéaire. Alors il existe un unique vecteur $z_f \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = (z_f \mid x)$$

Remarque 233. Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien usuel, si l'on considère un hyperplan (H) d'équation :

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

C'est l'hyperplan orthogonal au vecteur $n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$: $H = \{n\}^\perp$.

22.4 Matrice de produit scalaire

DÉFINITION 22.7 : **Matrice d'un produit scalaire**
Soit $(. \mid .)$ un produit scalaire, et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On appelle *matrice du produit scalaire dans la base* e, la matrice

$$Mat_e((. \mid .)) = (((e_i \mid e_j)))_{1\le i\le n 1\le j\le n} = \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 & \dots & (e_1 \mid e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_n \mid e_1) & \dots & \|e_n\|^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 22-3

Dans l'espace $E = \mathbb{R}_1[X]$, muni du produit scalaire $(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$, déterminer la matrice du produit scalaire dans la base canonique.

Remarque 234. La matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque est toujours symétrique. Si e est une base orthogonale, la matrice est diagonale. Si e est une base orthonormale, alors la matrice est I_n.

THÉORÈME 22.12 : **Expression matricielle du produit scalaire**
Soit e une base de E, et $x,y \in E$. Notons $A = Mat_e((. \mid .))$ et $X = Mat_e(x), Y = Mat_e(y)$. Alors

$$\boxed{(x \mid y) = {}^t X A Y}$$

Théorème 22.13 : **Propriétés d'une matrice de produit scalaire**
Soit A la matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque. Elle vérifie :
1. A est une matrice symétrique : ${}^tA = A$;
2. A est une matrice *positive* : $\forall X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$;
3. A est une matrice *définie* : $\forall X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = 0 \iff X = 0$;
4. A est une matrice inversible : $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 235. La matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque est toujours inversible. En effet, si $AX = 0$, alors à fortiori ${}^tXAX = 0$, c'est à dire $\|x\|^2 = 0$, et donc $X = 0$.

Lemme 22.14 : **Un lemme utile de calcul matriciel**
Soient $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices vérifiant

$$\forall X,Y \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAY = {}^tXBY$$

Alors $A = B$.

Théorème 22.15 : **Formule de changement de base**
Soient e et f deux bases de E. Notons $P = P_{e\to f}$ la matrice de passage. Alors

$$\boxed{Mat_f((.\mid .)) = {}^tPMat_e((.\mid .))P}$$

Si $A = \mathrm{Mat}_e((|))$, $B = \mathrm{Mat}_e((|))$, $P = P_{e\mapsto f}$, alors $\boxed{B = {}^tPAP}$.

Remarque 236. Ne pas confondre avec le changement de bases pour les matrices d'endomorphismes : $Mat_e(u) = PMat_f(u)P^{-1}$.

Exercice 22-4
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive :

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geq 0 \text{ et } {}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0$$

Montrer qu'il existe une matrice triangulaire P inversible à éléments diagonaux strictement positifs telle que $A = {}^tPP$.

22.5 Endomorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

On considère un espace euclidien $(E, (.\mid .))$ de dimension n.

Définition 22.8 : **Endomorphismes orthogonaux**
Soit $u \in L(E)$. On dit que u est un endomorphisme orthogonal (ou isométrie) si

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

Théorème 22.16 : **Un endomorphisme orthogonal conserve les produits scalaires**
Si $u \in \mathrm{O}(E)$, alors
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$$

Remarque 237. C'est une application typique de l'identité de polarisation.

Théorème 22.17 : **Groupe orthogonal**
$(\mathrm{O}(E),\circ)$ est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathcal{GL}(E),\circ)$. On l'appelle le *groupe orthogonal* de E.

Définition 22.9 : **Matrices orthogonales**
On dit qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si et seulement si :

$${}^tAA = I_n$$

On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Remarque 238. Une matrice orthogonale est inversible et

$$A^{-1} = {}^t A$$

Ce qui montre qu'elle vérifie également

$$A^t A = I_n$$

THÉORÈME 22.18 : **Caractérisation pratique des matrices orthogonales**
Soit $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est une matrice orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ forment une base orthonormale pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire :

$$\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2, \quad p \neq q \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ip} a_{iq} = 0$$

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$$

Exercice 22-5
Montrer que

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale et calculer A^{-1}.

THÉORÈME 22.19 : **La matrice d'une isométrie dans une bon est orthogonale**
On considère une *base orthonormale* ε d'un espace euclidien E, et un endomorphisme $u \in L(E)$. Notons $A = \operatorname{Mat}_\varepsilon(u)$. Alors

$$\underbrace{\big(u \text{ est une isométrie vectorielle }\big)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\big(A \text{ est une matrice orthogonale }\big)}_{(ii)}$$

Remarque 239. Le résultat précédent est faux si la base ε n'est pas orthonormale. Si e est une base quelconque, en notant $T = \operatorname{Mat}_e((|))$ la matrice du produit scalaire dans cette base, et $A = \operatorname{Mat}_e(u)$ la matrice de l'endomorphisme u dans cette base, u est un endomorphisme orthogonal si et seulement si :

$${}^t A T A = T$$

Lorsque la base est orthonormale, $T = I_n$ et la relation devient ${}^t A A = I_n$.

THÉORÈME 22.20 : **Caractérisation des matrices de passage entre bon**
Soit e une base orthonormale de E et f une base. Soit $P = P_{e \to f}$ la matrice de passage entre ces deux bases. Alors

$$\underbrace{\big(f \text{ est une base orthonormale}\big)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\big(P \text{ est une matrice orthogonale }\big)}_{(ii)}$$

Exercice 22-6
Soit $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$$

22.6 Projecteurs et symétries orthogonaux

DÉFINITION 22.10 : **Projecteur orthogonal**
Soit $p \in L(E)$ un projecteur ($p \circ p = p$). On dit que p est un projecteur orthogonal ssi $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont deux sous-espaces orthogonaux de E :

$$\forall x \in \operatorname{Ker} p, \forall y \in \operatorname{Im} p, \quad (x \mid y) = 0$$

Théorème 22.21 : Caractérisation des projecteurs orthogonaux
Soit p un projecteur. Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme *symétrique*, c'est à dire :
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (p(x) \mid y) = (x \mid p(y))$$

Théorème 22.22 : Matrice d'un endomorphisme symétrique dans une bon
Soit un endomorphisme u d'un espace euclidien. Alors, si $P = \mathrm{Mat}_\varepsilon(u)$ est la matrice de u dans une bon ε,
$$(u \text{ est symétrique }) \iff ({}^tP = P)$$

Remarque 240. Soit E un espace euclidien et e une *bon* de E. Soit $p \in L(E)$ et $P = mat_e(p)$. Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

1. $P^2 = P$
2. ${}^tP = P$.

Théorème 22.23 : Caractérisation de $p(x)$: conditions d'orthogonalité
Soit p un projecteur orthogonal sur $F = \mathrm{Im}\, p$. Soit $x \in E$. Alors $p(x)$ est l'unique vecteur de F vérifiant $\boxed{x - p(x) \in F^\perp}$.

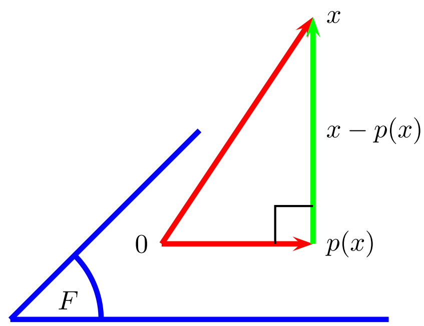


Fig. 22.2 – *Projecteur orthogonal*

Théorème 22.24 : Calcul du projeté orthogonal
Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $x \in E$. Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une base orthonormale de F, alors le projeté orthogonal $p(x)$ du vecteur x sur le sous-espace F vaut :
$$\boxed{p(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \mid \varepsilon_i) .\varepsilon_i}$$

Remarque 241. On peut également utiliser une base de F qui n'est pas orthonormale :

1. On détermine une base quelconque de F, $(f_1, \dots, f_p)$;
2. On décompose $p(x)$ sur cette base : $p(x) = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p$;
3. On écrit les p conditions d'orthogonalité : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $(x - p(x) \mid f_i) = 0$;
4. On résout alors le système de p équations $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j (f_j \mid f_i) = (x \mid f_i)$, $i \in [\![1,p]\!]$;
5. Si la base $(f_1, \dots, f_p)$ est orthonormale, alors la matrice du système est I_p et le système est déjà résolu.

Remarque 242. Pour déterminer le projeté orthogonal sur un hyperplan H, il y a une méthode plus simple :

1. Déterminer un vecteur n orthogonal à l'hyperplan :
$$E = H \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(n)$$
2. Décomposer $x = x_H + \lambda.n$. Alors $p(x) = x_H$;
3. Il suffit de connaître *le* scalaire λ. Pour cela, écrire que $(x - \lambda.n \mid n) = 0$ ce qui donne $\lambda = \dfrac{(x \mid n)}{\|n\|^2}$;
4. On obtient finalement
$$p(x) = x - \frac{(x \mid n)}{\|n\|^2}.n$$

Théorème 22.25 : Le projeté $p(x)$ réalise la meilleure approximation de x par des vecteurs de F
Pour $x \in E$, et F un sev de E, on définit

$$d(x,F) = \inf_{f \in F} \|x - f\|$$

Alors :
1. $d(x,F)$ est bien défini ;
2. $d(x,F) = \|x - p(x)\|$ où $p(x)$ est la projection orthogonale de x sur F ;
3. Si $f \in F$, $\|x - f\| \geq \|x - p(x)\|$ avec égalité si et seulement si $f = p(x)$.

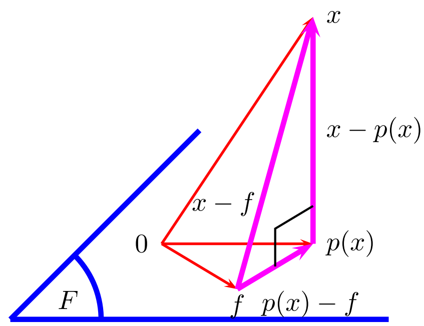


Fig. 22.3 – *Meilleure approximation*

Remarque 243. C'est une conséquence du théorème de Pythagore (voir le triangle rectangle de la figure 22.3) :

$$\forall f \in F,\ \|x - f\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2$$

Exercice 22-7
Dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère le vecteur $n = (1,1,1)$ et le sous-espace $F = \{n\}^\perp$. Ecrire la matrice du projecteur orthogonal sur F dans la base canonique. Si $x = (3,2,1)$, déterminer $d(x,F)$.

Exercice 22-8
Soit $E = \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$. Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que la quantité

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^t - (a + b\sin t + c\cos t)\right)^2 dt$$

soit minimale.

Définition 22.11 : Symétrie orthogonale
Soit $s \in L(E)$ une symétrie vectorielle ($s \circ s = \mathrm{id}$). On dit que s est une symétrie orthogonale ssi les deux sev $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$ sont orthogonaux On dit de plus que s est une *réflexion* si l'ensemble des vecteurs invariants, $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ est un hyperplan.

Théorème 22.26 : Caractérisation des symétries orthogonales
Une symétrie s est orthogonale si et seulement si s est un endomorphisme symétrique, c'est à dire :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (s(x) \mid y) = (x \mid s(y))$$

Remarque 244. Si ε est une *bon* et $S = Mat_\varepsilon(s)$ où $s \in L(E)$, alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si :
1. $S^2 = I_n$;
2. ${}^tS = S$.

Exercice 22-9
Soit $u \in \mathbb{R}^n$ euclidien usuel et s la réflexion par rapport à $\{u\}^\perp$. Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

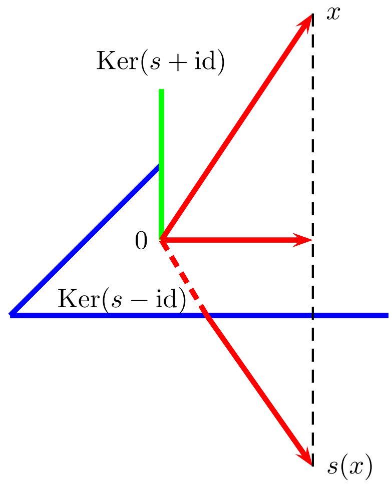


FIG. 22.4 – *Symétrie vectorielle orthogonale*

22.7 Espaces euclidiens orientés. Produit mixte

On considère un espace euclidien E muni d'un produit scalaire noté $(.\mid .)$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

DÉFINITION 22.12 : **Orientation**
Soient e et f deux bases de E et la matrice de passage $P = P_{e\mapsto f}$ entre ces deux bases. On dit que les deux bases e et f définissent la même orientation si et seulement si $\det(P) > 0$.
Orienter l'espace consiste à choisir une base e. Les bases de même orientation que e sont dites *directes* et les autres *indirectes*.

Remarque 245. Si $e = (e_1,e_2,e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et si l'on choisit l'orientation définie par cette base, alors la base $f = (e_2,e_3,e_1)$ est directe alors que la base $g = (e_1,e_3,e_2)$ est indirecte.

PROPOSITION 22.27 : **Matrice de passage entre deux bon de même orientation**
Soient $e = (e_1,\dots,e_n)$ et $f = (f_1,\dots,f_n)$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E. Notons $P = P_{e\mapsto f}$ la matrice de passage entre les bases e et f. Alors :

1. $\det(P) = \pm 1$;
2. Si les deux bases orthonormales ont même orientation, alors $\det(P) = +1$.

DÉFINITION 22.13 : **Produit mixte**
Soit E un espace euclidien orienté de dimension n et ε une *bon directe*. Soient $(x_1,\dots,x_n)$ n vecteurs de E. On appelle produit mixte de ces n vecteurs, le scalaire

$$\mathrm{Det}(x_1,\dots,x_n) = \det_\varepsilon(x_1,\dots,x_n)$$

Il est indépendant de la bon directe choisie.

Remarque 246. Dans $\mathbb{R}^2$, le produit mixte de deux vecteurs $\mathrm{Det}(x,y)$ représente l'aire algébrique du parallélogramme défini par ces deux vecteurs.
Dans $\mathbb{R}^3$, le produit mixte de trois vecteurs $\mathrm{Det}(x,y,z)$ représente le volume algébrique du parallélépipède qui s'appuie sur ces trois vecteurs.

THÉORÈME 22.28 : **Inégalité de Gram** [a]

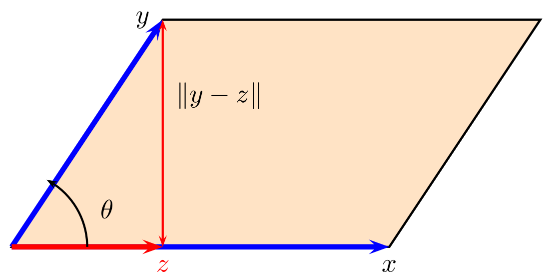
$$\left|\mathrm{Det}(x_1,\dots,x_n)\right| \leq \|x_1\|\dots\|x_n\|$$

Avec égalité ssi les vecteurs $x_1,\dots,x_n$ sont deux à deux orthogonaux.

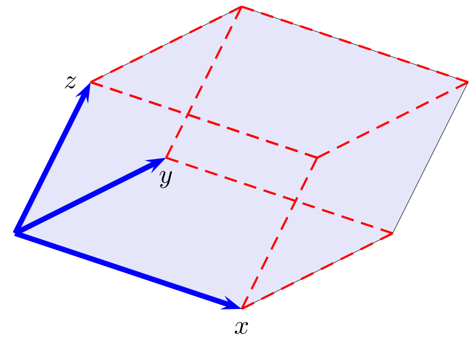
[a] Jorgen Pedersen Gram, (27/06/1850-29/04/1916), Danois. Célèbre pour l'inégalité de Gram-Schmidt (même si Cauchy l'avait déjà utilisée en 1836)

22.8 Produit vectoriel

On considère dans cette section, un espace euclidien orienté de dimension 3 : $(E,3,(.\mid .))$.



(a) Aire du parallélogramme : $\|x\| \times \|y\| \sin\theta = \left|\mathrm{Det}(x,y)\right|$



(b) Produit mixte de trois vecteurs dans E_3

FIG. 22.5 – *Interprétation du produit mixte*

DÉFINITION 22.14 : **Produit vectoriel**

Soient $(x,y) \in E^2$. L'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \mathrm{Det}(x,y,z) \end{array} \right.$$

est une forme linéaire. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur noté $x \wedge y$ tel que

$$\forall z \in E, \quad \mathrm{Det}(x,y,z) = (x \wedge y \mid z)$$

On appelle $x \wedge y$ le *produit vectoriel* de x avec y.

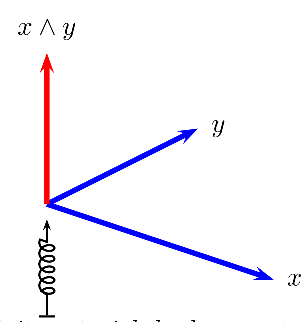


FIG. 22.6 – *Produit vectoriel de deux vecteurs dans E_3*

THÉORÈME 22.29 : **Propriétés du produit vectoriel**

1. L'application
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x \wedge y \end{array} \right.$$
est linéaire par rapport à chaque variable.
2. Si x et y sont colinéaires, leur produit vectoriel est nul.
3. $y \wedge x = -x \wedge y$.
4. Si (x,y) est un système libre, alors
   (a) $x \wedge y \neq 0$
   (b) $\mathrm{Vect}(x,y)^\perp = \mathrm{Vect}(x \wedge y)$.
   (c) $(x,y,x \wedge y)$ est une base directe de E.

Théorème 22.30 : Coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs
Soit ε une *bon directe* de E. Soient deux vecteurs $(x,y) \in E$, de matrices X,Y dans la base ε :

$$X = \mathrm{Mat}_\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y = \mathrm{Mat}_\varepsilon(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Notons T la matrice du vecteur $x \wedge y$ dans la base ε : $T = \mathrm{Mat}_\varepsilon(x \wedge y)$. Alors :

$$T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -(x_1y_3 - x_3y_1) \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Théorème 22.31 : Identité de Lagrange et formule du double produit vectoriel
Si $(x,y,z) \in E^3$,

1. $\|x\|^2\|y\|^2 = \|x \wedge y\|^2 + (x \mid y)^2$ (Lagrange) ;
2. $x \wedge (y \wedge z) = (x \mid z).y - (x \mid y).z$ (double produit vectoriel).

Exercice 22-10

Le produit vectoriel définit une lci dans E. Cette loi est-elle commutative ? Associative ? Possède-t-elle un élément neutre ?

Exercice 22-11

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, on se donne deux vecteurs $a,b \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. Résoudre l'équation

$$a \wedge x = b$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 22-12

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, ε une bon directe et $a \in \mathbb{R}^3$, on considère l'application

$$f : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & a \wedge x \end{cases}$$

a) Montrer que f est linéaire et écrire la matrice de f dans ε.

b) Montrer que f est un endomorphisme antisymétrique :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^3, \quad (f(x) \mid y) = -(x \mid f(y))$$

22.9 Etude du groupe orthogonal

Définition 22.15 : $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$
Soit une matrice orthogonale $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(A) = \pm 1$. On définit les sous-ensembles de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ suivants :

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = +1\} \quad \mathrm{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = -1\}$$

Les matrices de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont appelées *spéciales orthogonales*. L'ensemble $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\times)$.

Proposition 22.32 : Critère pour reconnaître les matrices de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$
Soit une matrice orthogonale $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Soit un coefficient $a_{ij} \neq 0$ de la matrice A et Δ_{ij} le cofacteur associé.

1. Si $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, alors $a_{ij} = \Delta_{ij}$;
2. si $A \in \mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$, alors $a_{ij} = -\Delta_{ij}$.

Remarque 247. En pratique, pour vérifier qu'une matrice $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est spéciale orthogonale, on calcule le déterminant $\Delta_{11} = m_{11}$ et on compare son signe avec celui du coefficient a_{11}.

DÉFINITION 22.16 : **Isométries directes et indirectes**
Soit une isométrie $u \in \mathrm{O}(E)$ d'un espace euclidien orienté E. Alors $\det(u) = \pm 1$. On dit que u est une *isométrie directe* de E lorsque $\det(u) = +1$, et une isométrie indirecte lorsque $\det(u) = -1$. On note $\mathrm{SO}(E)$ l'ensemble des isométries directes, et $\mathrm{O}^-(E)$ l'ensemble des isométries indirectes de E. L'ensemble $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $(\mathrm{O}(E),\circ)$.

Remarque 248. Si ε est une base orthonormale de E, et si U est la matrice de l'isométrie u dans la base ε, alors

$$\underset{(i)}{\big(u \text{ isométrie directe }\big)} \Longleftrightarrow \underset{(ii)}{\big(U \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})\big)}$$

22.9.1 Etude du groupe orthogonal en dimension 2.

THÉORÈME 22.33 : **Etude de $SO_2(\mathbb{R})$**

1. Les matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont de la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

2. $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$
3. $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$
4. L'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\times) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

THÉORÈME 22.34 : **Rotations vectorielles**
Soit E un espace euclidien de dimension 2 orienté et $u \in \mathrm{SO}(E)$ une isométrie directe. Alors il existe un unique $\theta \in [0,2\pi[$ tel que pour *toute bon directe* ε de E,

$$Mat_\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On dit que u est la rotation vectorielle d'angle θ et on note $u = r_\theta$.

THÉORÈME 22.35 : **Angle de deux vecteurs**
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et $(U,V) \in E^2$ deux vecteurs non-nuls. On définit

$$u = \frac{U}{\|U\|}, \quad v = \frac{V}{\|V\|}$$

Alors il existe une unique rotation $r \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ telle que $v = r(u)$. Si θ est l'angle de la rotation $\theta \in [0,2\pi[$, on note

$$\widehat{(U,V)} = \theta$$

l'angle orienté des vecteurs (U,V). On a alors

1. $\mathrm{Det}(U,V) = \|U\|\|V\| \sin\theta$
2. $(U \mid V) = \|U\|\|V\| \cos\theta$

Remarque 249. On utilise ces formules pour déterminer l'angle entre deux vecteurs. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté usuel, quel est l'angle entre les vecteurs $U = (1,1)$ et $V = (0,1)$?

THÉORÈME 22.36 : **Etude de $O_2^-(\mathbb{R})$**
Considérons la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$. L'application

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & AP \end{array} \right.$$

est une bijection. Toute matrice de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

THÉORÈME 22.37 : **Isométries indirectes**
Une isométrie indirecte d'un espace euclidien orienté de dimension 2 est une symétrie orthogonale par rapport à une droite (réflexion).

THÉORÈME 22.38 : **Décomposition des rotations**
Toute rotation d'un espace euclidien orienté de dimension 2 s'écrit comme composée de deux réflexions.

Remarque 250. Les réflexions engendrent le groupe orthogonal $O(E_2)$. Toute isométrie de E_2 s'écrit comme un produit de 1 ou 2 réflexions.

22.9.2 Etude du groupe orthogonal en dimension 3

On considère un espace euclidien orienté E_3 de dimension 3.

THÉORÈME 22.39 : **Isométries directes en dimension 3 : rotations vectorielles**
Soit une isométrie directe $u \in \mathrm{SO}(E_3)$. On note $E(1) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ le sous espace vectoriel formé des vecteurs invariants par u. On montre que :

1. Si $u \neq \mathrm{id}_E$, $E(1)$ est une droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$ où ε_3 est un vecteur de norme 1 ;
2. Pour toute base orthonormée directe $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ (le troisième vecteur ε_3 dirigeant l'axe et fixé), la matrice de u dans la base ε s'écrit :

$$Mat_e(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On dit que u est la *rotation* d'axe $\mathrm{Vect}(e_3)$ et d'angle θ.

Remarque 251. L'angle de la rotation dépend du choix du vecteur d. Si l'on choisit $d' = -d$ pour diriger l'axe, l'angle θ est transformé en son opposé.

Remarque 252. Ne pas confondre l'angle θ de la rotation avec l'angle entre les vecteurs x et $r(x)$!

PROPOSITION 22.40 : **Détermination de l'angle d'une rotation**
Soit E_3 euclidien orienté, r une rotation et d un vecteur unitaire qui dirige l'axe de cette rotation. Ce vecteur d défnit une orientation du plan $\mathrm{Vect}\, d^\perp$ et donc l'angle θ de r. Soit $\varepsilon \in \mathrm{Vect}(d)^\perp$.

$$r(\varepsilon) = \cos\theta.\varepsilon + \sin\theta.d \wedge \varepsilon$$

Remarque 253. Cette proposition donne un moyen pratique de déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation :

1. Déterminer l'axe D de la rotation : c'est l'ensemble des vecteurs invariants.
2. Chercher un vecteur $d \in D$ unitaire. Il définit une orientation sur le plan $P = \mathrm{Vect}(d)^\perp$.
3. Déterminer un vecteur $\varepsilon_1 \in P$, vérifiant $(d \mid \varepsilon_1) = 0$.
4. Poser $\varepsilon_2 = d \wedge \varepsilon_1$. Alors $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,d)$ est une bon directe de l'espace.
5. Calculer $r(\varepsilon_1)$ et le décomposer sur ε_1 et ε_2 :

$$r(\varepsilon_1) = \cos\theta\varepsilon_1 + \sin\theta\varepsilon_2$$

On en tire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ et donc l'angle de la rotation.

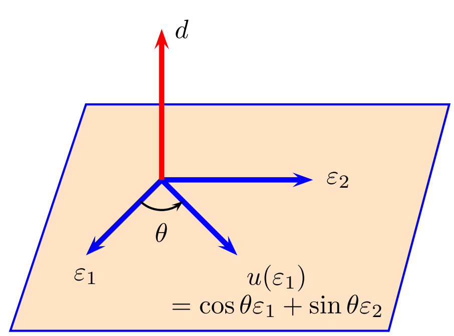


FIG. 22.7 – *Détermination de l'angle θ d'une rotation*

Remarque 254. On peut également utiliser les remarques suivantes pour étudier une rotation u donnée par sa matrice A dans une base quelconque :

1. On vérifie que $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ en montrant que la matrice A est orthogonale et en montrant que $\det(A) = +1$ (il suffit de comparer a_{11} et Δ_{11}).
2. On sait que dans toute base orthogonale directe de la forme $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,d)$,
$$Mat_\varepsilon(u) = U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Alors les matrices A et U sont semblables et par conséquent, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(U)$ d'où l'on tire
$$\boxed{2\cos\theta + 1 = \mathrm{Tr}(A)}$$
3. On détermine l'axe de la rotation en cherchant les vecteurs invariants : $\mathrm{Vect}(d)$ où d est un vecteur unitaire. Cela revient à résoudre un système homogène 3×3.
4. On détermine un vecteur ε_1 unitaire orthogonal à d et on calcule
$$\mathrm{Det}\big(\varepsilon_1,u(\varepsilon_1),d\big)$$
Comme ce produit mixte est indépendant de la bon directe choisie pour le calculer, en introduisant (sans le calculer) ε_2 tel que $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,d)$ soit une bon directe,
$$\mathrm{Det}\big(\varepsilon_1,u(\varepsilon_1),d\big) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin\theta$$
5. On obtient donc :
$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2}}, \quad \boxed{\sin\theta = \mathrm{Det}\big(\varepsilon_1,u(\varepsilon_1),d\big)}$$
et l'on en tire l'angle θ de la rotation.

Exercice 22-13

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté euclidien usuel, on considère l'endomorphisme de matrice
$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
dans la base canonique. Reconnaître cet endomorphisme et préciser ses éléments caractéristiques.

Théorème 22.41 : **Classification des isométries en dimension 3**

Soit un endomorphisme orthogonal $u \in \mathrm{O}(E)$. On note $E(1) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ le sous-espace formé des vecteurs invariants. Selon la dimension de $E(1)$, on a la classification suivante :

$\dim E(1)$	$\det(u)$	$u \in$	Nature de u
3	1	$\mathrm{SO}(E)$	id
2	-1	$\mathrm{O}^-(E)$	Réflexion s_H
1	1	$\mathrm{SO}(E)$	Rotation autour d'un axe r (dont les demi-tours)
0	-1	$\mathrm{O}^-(E)$	Composée d'une rotation et d'une réflexion

Dans le dernier cas, $u = r \circ s_H$, où le plan H invariant par la réflexion est orthogonal à l'axe de la rotation r.

Remarque 255. Si $A \in \mathrm{O}_3^-(\mathbb{R})$, alors $\det(-A) = -\det(A) = 1$. Donc la matrice $-A$ est spéciale orthogonale. On se ramène à l'étude précédente. On peut également résumer la classification des isométries de E_3 de la façon suivante :

- Isométries directes : ce sont des rotations d'axe une droite vectorielle. (Les symétries orthogonales par rapport à une droite sont des rotations d'angle π, et on convient que id_E est une rotation d'angle 0) ;
- Isométries indirectes : elles sont de la forme $-r_{D,\theta}$ où $r_{D,\theta}$ est une rotation par rapport à une droite vectorielle D (avec l'identité). On a alors $u = -r_{D,\theta} = r_{D,\theta+\pi} \circ s_{D^\perp}$.

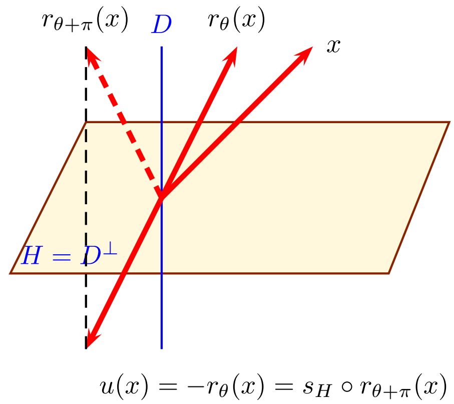


FIG. 22.8 – *Isométrie indirecte avec $E(1) = \{0_E\}$*

Remarque 256. On montre qu'une rotation vectorielle $r_{D,\theta}$ s'écrit comme produit de deux réflexions s_H et $s_{H'}$ avec $H \cap H' = D$. Alors toute isométrie de E_3 se décompose comme un produit de réflexions. Par conséquent, les réflexions engendrent le groupe orthogonal $\mathrm{O}(E_3)$.

Exercice 22-14

Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Reconnaître l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 22-15

Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Reconnaître l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 22-16

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, on considère la rotation d'axe dirigé par le vecteur $n = (1,1,1)$ d'angle $\dfrac{\pi}{6}$. Écrire la matrice de cette rotation dans la base canonique.

DÉFINITION 22.17 : **Angle de deux vecteurs dans E_3**

Si $a,b \in E_3$ sont deux vecteurs non-nuls, d'après l'identité de Lagrange,

$$(a \mid b)^2 + \|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 \Rightarrow \left(\frac{(a \mid b)}{\|a\|\|b\|}\right)^2 + \left(\frac{\|a \wedge b\|}{\|a\|\|b\|}\right)^2 = 1$$

Donc $\exists! \theta \in [0,\pi[$ tel que

$$\boxed{\cos\theta = \frac{(a \mid b)}{\|a\|\|b\|}, \quad \sin\theta = \frac{\|a \wedge b\|}{\|a\|\|b\|}}$$

On dit que θ est l'angle entre les vecteurs a et b.