Chapitre 8

Les nombres réels

8.1 Valeur absolue, majorer, minorer.

On considère l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$, muni de l'ordre usuel $\leq$ et des opérations $+$, $\times$. On verra plus tard que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps.

Remarque 53. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note $x < y$ ssi $x \leq y$ et $x \neq y$. En analyse on préfère toujours travailler avec des inégalités larges et utiliser les inégalités strictes seulement lorsqu'elles sont nécessaires.

DÉFINITION 8.1 : **Valeur absolue, distance de deux points**
On définit pour un réel x sa valeur absolue :

$$|x| = \max(x, -x)$$

La quantité $\mathrm{d}(x,y) = |x-y|$ mesure la distance entre deux réels x et y.

THÉORÈME 8.1 : **Inégalité triangulaire**

- $|xy| = |x|.|y|$
- $\big||x|-|y|\big| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$ (inégalité triangulaire).

THÉORÈME 8.2 : **Quelques inégalités classiques**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad |ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|$$
$$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$
$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$$

Exercice 8-1

a) Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

b) Pour $x \in [2,3]$, encadrer $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x+1}$

c) On considère la suite de terme général $u_n = \dfrac{n^3+n^2}{n^2+1}$. La majorer et la minorer à partir d'un certain rang par des suites de la forme cn.

d) Majorer $\dfrac{n+1}{3^{n^2-n}}$ par une suite de la forme $\dfrac{c}{n}$ à partir d'un certain rang.

e) Montrer que la suite de terme général $u_n = \sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2+1}$ est majorée.

f) Majorer pour $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\left|\dfrac{\sin x - 2\cos x}{e^{\sin x}}\right|$.

Définition 8.2 : Droite réelle achevée
On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, et l'on étend la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Définition 8.3 : Segments
Soient deux réels $a < b$. On appelle *segment* $[a,b]$, la partie de $\mathbb{R}$ définie par

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Définition 8.4 : Intervalles
Soit une partie non-vide de $\mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$. On dit que cette partie I est un intervalle lorsque

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow [x,y] \subset I$$

où

$$[x,y] = \{z \in \mathbb{R} \text{ tq } x \leq z \leq y\}$$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont de la forme $[a,b]$,$]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ où a et b peuvent être infinis. On note quelquefois (a,b) pour désigner un intervalle quelconque.

Remarque 54. Un segment est un intervalle fermé et borné. Nous verrons plusieurs théorèmes valables sur les intervalles ou les segments, donc ne pas confondre ces deux notions.

Définition 8.5 : Partie entière
Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$n \leq x < n + 1$$

On note cet entier $n = E(x)$ ou $n = \lfloor x \rfloor$.

Théorème 8.3 : Encadrement d'un réel
Soit $\alpha > 0$ un réel strictement positif. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! k \in \mathbb{Z} \mid k\alpha \leq x < (k+1)\alpha$$

Une autre façon de citer ce résultat : tout nombre réel x s'écrit de manière unique sous la forme $x = k\alpha + y$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq y < \alpha$.

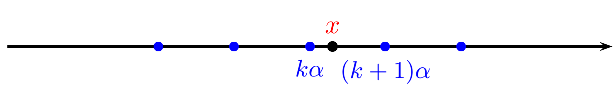

Fig. 8.1 – *Congruence d'un réel*

Définition 8.6 : Valeurs décimales approchées
Soit un réel x, et un entier naturel $n \geq 1$. Si p est un entier relatif tel que

$$\frac{p}{10^n} \leq x \leq \frac{p+1}{10^n}$$

on dit que $\frac{p}{10^n}$ est une valeur décimale approchée de x par défaut à la précision 10^{-n}, et que $\frac{p+1}{10^n}$ est une valeur décimale approchée de x par excès à la précision 10^{-n}.

Définition 8.7 : Densité
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On dit que la partie A est dense dans B lorsque

$$\forall x \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } |x - a| \leq \varepsilon$$

THÉORÈME 8.4 : **$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$**
Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ alors $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, ou de façon équivalente, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists r \in \mathbb{Q} \text{ tq } |x - r| \leq \varepsilon$$

THÉORÈME 8.5 : **Le complémentaire de $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ tq } |x - \theta| \leq \varepsilon$$

Remarque 55. On en déduit qu'entre deux réels il existe toujours un rationnel (irrationnel) :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \text{ tq } a < b,\ \exists r \in \mathbb{Q} \text{ avec } a < r < b$$

8.2 Borne supérieure

On considère dans ce qui suit une partie $A \subset \mathbb{R}$.

DÉFINITION 8.8 : **Majorants, minorants d'une partie**

1. Un réel $M \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de la partie A ssi tout élément de A est inférieur à M :
$$\forall x \in A,\ x \leq M$$
2. Un réel $m \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de la partie A ssi tout élément de A est supérieur à m :
$$\forall x \in A,\ x \geq m$$

DÉFINITION 8.9 : **Parties bornées**
Soit une partie $A \subset \mathbb{R}$. On dit qu'elle est bornée si et seulement si $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in A$, $|x| \leq M$. C'est équivalent à dire que la partie A est majorée et minorée.

DÉFINITION 8.10 : **Plus grand, plus petit élément d'une partie**

1. Un réel $a \in \mathbb{R}$ est un *plus grand élément* de A ssi $a \in A$ et tout élément de A est inférieur à a :
$$\forall x \in A, x \leq a$$
S'il existe, le plus grand élément est unique et on le note
$$\boxed{a = \max A}$$
2. Un réel $b \in \mathbb{R}$ est un *plus petit élément* de A ssi $b \in A$ et tout élément de A est supérieur à b :
$$\forall x \in A, x \geq b$$
S'il existe, le plus petit élément est unique et on le note
$$\boxed{b = \min A}$$

DÉFINITION 8.11 : **Borne supérieure, inférieure d'une partie**

1. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément a, alors on dit que a est la *borne supérieure* de A. Dans ce cas, a est unique et l'on note
$$\boxed{a = \sup A}$$
2. Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément b, alors on dit que b est la *borne inférieure* de A. Dans ce cas, b est unique et l'on note
$$\boxed{b = \inf A}$$

`Exemple 12.` Déterminer s'ils existent le plus grand (petit) élément, la borne sup (inf) des parties suivantes :
- $A = [0,1]$
- $A = [0,1[$
- $A = \{1/n;\ n \in \mathbb{N}^*\}$

Exercice 8-2

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide. On suppose qu'elle possède un plus grand élément $a \in A$. Montrer qu'alors $\sup A = a$.

THÉORÈME 8.6 : Caractérisation de la borne sup par ϵ
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors on a l'équivalence :

H1 $a = \sup A$

H2 1. a est un majorant de la partie A : $\forall x \in A, x \leq a$;
2. $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in A$ tel que $a - \epsilon \leq x_\epsilon \leq a$.

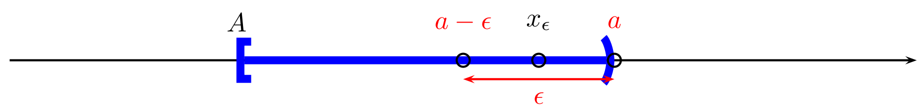

FIG. 8.2 – *Caractérisation de la borne supérieure*

Exercice 8-3

Ecrire le théorème correspondant pour la borne inférieure et le démontrer.

L'ensemble des réels possède la propriété fondamentale suivante que l'on admettra :

THÉORÈME 8.7 : Propriété de la borne sup.
Soit une partie de $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$. Si

H1 A est non-vide,

H2 A est majorée,

alors la partie A admet une borne supérieure.

Remarque 56. On a la propriété équivalente pour la borne inférieure : toute partie non-vide de $\mathbb{R}$ et minorée possède une borne inférieure.

Remarque 57. Cette propriété distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. En effet, la partie

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

DÉFINITION 8.12 : Borne sup. d'une fonction
Soit $D \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \mapsto \mathbb{R}$ une application. On considère la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A = f(D)$.
On dit que f possède une borne supérieure ssi A possède une borne supérieure. On la note alors

$$\boxed{a = \sup_{x \in D} f(x)}$$

THÉORÈME 8.8 : Caractérisation de la borne sup. d'une fonction
On caractérise $a = \sup_{x \in D} f(x)$ par les propriétés :

H1 f est majorée par a : $\forall x \in D$, $f(x) \leq a$;

H2 $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in D$ tel que $a - \epsilon \leq f(x_\epsilon) \leq a$.

Raisonnement de passage à la borne supérieure.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide. Si $\forall x \in A$, $x \leq M$, alors $\sup A \leq M$

Exercice 8-4

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux parties non-vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrez que

$$A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$$

Exercice 8-5

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f,g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions bornées. Montrez que

$$\sup_{x \in I} |(f+g)(x)| \leq \sup_{x \in I} |f(x)| + \sup_{x \in I} |g(x)|$$

A-t-on égalité en général ?

Exercice 8-6

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées. On note

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \exists (a,b) \in A \times B, x = a + b\}$$

Montrez que $A + B$ possède une borne supérieure et que

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$
