Chapitre 15

Intégration

15.1 Construction de l'intégrale

15.1.1 Intégrale d'une fonction en escalier

DÉFINITION 15.1 : **Subdivision**
On appelle subdivision σ du segment $[a,b]$ tout sous-ensemble fini de $[a,b]$ contenant les éléments a et b. On ordonnera ces éléments et l'on écrira $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ les éléments de cette subdivision.

Remarque 163. Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions du segment $[a,b]$, on peut introduire la subdivision $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ qui est plus fine que σ_1 et que σ_2.

DÉFINITION 15.2 : **Fonction en escalier**
Une fonction $\varphi \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est en escalier s'il existe une subdivision σ de $[a,b]$: $a < x_1 \ldots < x_n = b$ telle que φ soit constante sur chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$ pour $0 \le i \le n-1$.
La subdivision σ est dite *subordonnée* à la fonction φ. On notera $\mathcal{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier.

Remarque 164. Si σ est une subdivision associée à la fonction en escalier φ, alors toute subdivision plus fine que σ est également subordonéee à φ.

Remarque 165. Une fonction constante est une fonction en escalier.

PROPOSITION 15.1 : **Algèbre des fonctions en escalier**
L'ensemble $\mathcal{E}([a,b])$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\big(\mathcal{F}([a,b]), +, \times, \cdot\big)$ des fonctions définies sur le segment $[a,b]$.

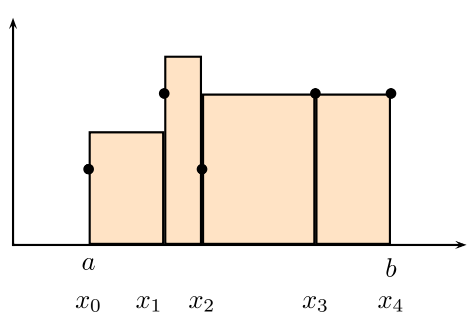

FIG. 15.1 – *Fonction en escalier*

DÉFINITION 15.3 : **Intégrale de Riemann d'une fonction en escalier**
On appelle intégrale de Riemann de la fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, le réel :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i (x_{i+1} - x_i)$$

pour une subdivision subordonnée à la fonction φ. Cette quantité est indépendante de la subdivision σ subordonnée à φ.

Théorème 15.2 : **Propriétés**

1. $\varphi \mapsto \int_{[a,b]} \varphi$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$;
2. Si φ est une fonction en escalier positive sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]} \varphi \geq 0$;
3. On a la relation de Chasles : si $a < c < b$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi$.

Remarque 166. En utilisant la linéarité et la positivité, on montre la croissance de l'intégrale : si φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur le segment $[a,b]$ telles que $\varphi \leq \psi$, alors $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$.

15.1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 15.4 : **Fonction continue par morceaux**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. On dit qu'elle est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$ du segment $[a,b]$ telle que :

1. La restriction f_i de la fonction f à chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$, $(0 \leq i \leq n-1)$ est continue ;
2. Pour $i \in [\![0,n-1]\!]$, la fonction f_i possède une limite finie λ_i lorsque $x \to x_i^+$, et une limite finie μ_i lorsque $x \to x_{i+1}^-$.

Remarque 167. On montre que l'ensemble $\mathcal{C}_m([a,b])$ des fonctions continues par morceaux est une sous-algèbre de l'algèbre $\left(\mathcal{C}^0([a,b]), +, \times, \cdot\right)$ des fonctions continues sur le segment $[a,b]$.

Lemme 15.3 : **Une fonction continue par morceaux est égale à une fonction continue plus une fonction en escalier**
Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Alors il existe une fonction en escalier φ définie sur le segment $[a,b]$ telle que la fonction $g = f + \varphi$ soit continue sur le segment $[a,b]$.

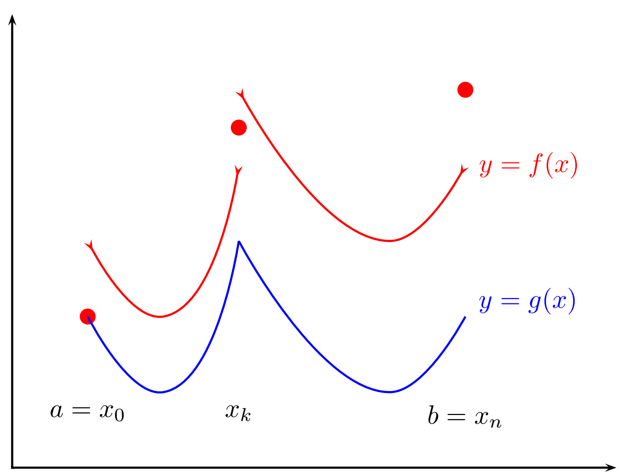

Fig. 15.2 – *Fonction continue par morceaux et la fonction continue associée*

Théorème 15.4 : **Approximation d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction en escalier $\varphi : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

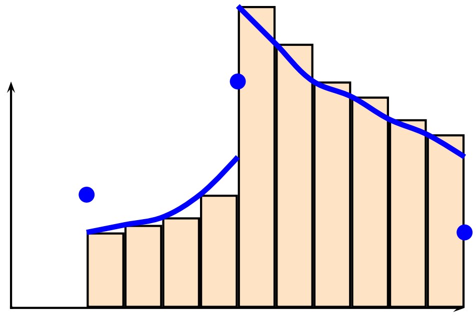

FIG. 15.3 – *Approximation d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier*

COROLLAIRE 15.5 : **Encadrement d'une fonction continue par morceaux par deux fonctions en escalier**
Soit une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ sur $[a,b]$ telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in [a,b],\ \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \\ \forall x \in [a,b],\ 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon \end{cases}$$

DÉFINITION 15.5 : **Intégrale supérieure, intégrale inférieure**
Soit une fonction bornée $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$. On note

$$I^-(f) = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}([a,b]) \\ \varphi \leq f}} \int_{[a,b]} \varphi \quad \text{et} \quad I^+(f) = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{E}([a,b]) \\ \psi \geq f}} \int_{[a,b]} \psi$$

On dit que la fonction bornée f est intégrable sur le segment $[a,b]$ si et seulement si $I^-(f) = I^+(f)$ et on appelle intégrale de f sur le segment $[a,b]$ cette valeur commune :

$$\int_{[a,b]} f = I^-(f) = I^+(f)$$

Remarque 168. Il existe des fonctions bornées non-intégrables. Par exemple la fonction caractéristique des rationnels sur $[0, 1]$ définie par

$$\chi : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$$

En effet, on montre que $I^-(\chi) \leq 0$ et $I^+(\chi) \geq 1$.

THÉORÈME 15.6 : **Intégrale d'une fonction continue par morceaux**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. La fonction f est intégrable sur $[a,b]$.

THÉORÈME 15.7 : **Approximation de l'intégrale d'une fonction continue**
Soit une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors il existe une suite (φ_n) de fonctions en escalier telle que

$$d_n = \|f - \varphi_n\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Pour toute suite (φ_n) de fonctions en escalier vérifiant cette condition, on a :

$$\int_{[a,b]} \varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{[a,b]} f$$

On peut alors étendre les propriétés de l'intégrale aux fonctions continues par morceaux :

THÉORÈME 15.8 : **Propriétés fondamentales de l'intégrale**

1. **Linéarité :** l'application
$$I : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_m([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{[a,b]} f \end{array} \right.$$
est une forme linéaire ;
2. **Positivité :** si $f \in \mathcal{C}_m([a,b])$ est une fonction positive : $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$;
3. **Relation de Chasles :** si $a < c < b$, et si la fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, alors sa restriction aux segments $[a,\ c]$ et $[c,b]$ est continue par morceaux et
$$\int_{[a,c]} f_{|[a,\ c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]} = \int_{[a,b]} f$$

15.1.3 Notations définitives et majorations fondamentales d'intégrales.

DÉFINITION 15.6 : **N**otations
Soit une fonction f continue sur $[a,b]$. On note selon la position de a par rapport à b :

- $a < b$, $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{[a,b]} f$;
- $b < a$, $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{[b,a]} f$;
- $b = a$, $\int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

Remarque 169. Pour montrer qu'une intégrale $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est bien définie, il suffit de montrer que la fonction f est continue (par morceaux) sur le segment $[a,b]$. Par exemple, l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-k\sin x}}$ existe lorsque $0 < k < 1$. L'intégrale $\int_0^1 \dfrac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ existe car la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité sur le segment $[0,1]$.

PROPOSITION 15.9 : **Chasles**
Le théorème de Chasles est encore valable avec les nouvelles notations. Si une fonction f est continue par morceaux sur l'intervalle I et si l'on considère trois réels $(a,b,c) \in I^3$, alors
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Dans la suite, on supposera que $a < b$, mais il faudra faire attention aux majorations lorsque $b < a$. Le théorème suivant résume les majorations fondamentales d'intégrales (à bien connaître) :

THÉORÈME 15.10 : **Majoration d'intégrales**
Soient deux fonctions f et g continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ avec $a < b$. Alors :

1. $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$;
2. $\forall x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M(b-a)$;
3. $\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$;
4. Si la fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, alors elle est bornée et
$$\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$
5. Si deux fonctions f et g sont continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors on a l'inégalité de la moyenne :
$$\left|\int_{[a,b]} fg(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_{[a,b]} |g(x)|\ \mathrm{d}x$$

Remarque 170. Retenons que pour majorer une intégrale sur $[a,b]$, il suffit de majorer la fonction en *tout* point du segment $[a,b]$.

Exercice 15-1

Etudier les limites des suites définies par les intégrales suivantes :
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

$$J_n = \int_0^1 x^n \arctan(1 - nx)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 15-2

Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

$$\lim_{a\to 0} \int_0^1 x^2\sqrt{1+a^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 15-3

Soit une fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continue. Étudier la limite de la suite de terme général :

$$I_n = \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 15-4

Déterminer un équivalent lorsque $x \to 0$ de la fonction définie par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$$

THÉORÈME 15.11 : **Si l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle, la fonction est nulle**

Soit une fonction f vérifiant :

- (H1) f est *continue* sur le segment $[a,b]$;
- (H2) $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0$;
- (H3) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Alors $\forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$.

Remarque 171. Le théorème précédent est faux si on suppose uniquement que la fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ (faire un dessin d'une fonction nulle partout sauf en un point).

Exercice 15-5

Soit une fonction continue $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Montrer que f garde un signe constant.

THÉORÈME 15.12 : **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soient deux fonctions continues f et g sur le segment $[a,b]$. Alors

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}}$$

avec cas d'égalité ssi $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda f$.

THÉORÈME 15.13 : **Inégalité de Minkowski**

Soient deux fonctions continues f et g sur le segment $[a,b]$. En notant $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$, on a l'inégalité suivante :

$$\boxed{\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2}$$

Exercice 15-6

Soit une suite de fonctions (f_n) toutes continues sur le segment $[a,b]$. On suppose que

$$\int_a^b f_n^4(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Montrer qu'alors

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

15.2 Le théorème fondamental du calcul

Exercice 15-7

Soit une fonction $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Montrer que la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est lipschitzienne sur le segment $[a,b]$.

THÉORÈME 15.14 : **Le théorème fondamental du calcul**

(H1) Soit un *intervalle* I.

(H2) Soit une fonction f *continue* sur I.

Soit un point $a \in I$. Alors la fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

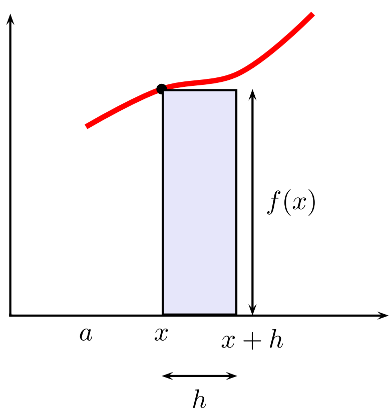

FIG. 15.4 – *Théorème fondamental :* $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \approx f(x)$

Rappelons les notions sur les primitives vues en calcul différentiel.

DÉFINITION 15.7 : **Primitives**

Soit un *intervalle* I et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $F : I \mapsto \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si

1. la fonction F est dérivable sur l'intervalle I ;
2. $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

PROPOSITION 15.15 : Deux primitives de f sur I sont égales à une constante près.

Remarque 172. Le théorème précédent est une conséquence du théorème des accroissements finis.

Théorème 15.16 : Existence de primitives d'une fonction continue
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction *continue* sur un *intervalle* I. La fonction f admet des primitives sur l'intervalle I. En particulier, si l'on considère un point $a \in I$, la fonction

$$F : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a.

Corollaire 15.17 : Calcul d'intégrales
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$, et $G : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une primitive de f sur le segment $[a,b]$. Alors, on sait calculer l'intégrale de f :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

Corollaire 15.18 : Théorème fondamental deuxième forme
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Alors la formule suivante relie f et sa dérivée par une intégrale. Pour tout $x \in [a,b]$:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Remarque 173. On se sert de la formule précédente pour montrer des relations entre une fonction et ses dérivées. Par exemple, en utilisant des techniques de majorations d'intégrales, on retrouve l'inégalité des accroissements finis (avec des hypothèses légèrement plus fortes sur f : $f \in \mathcal{C}^1\mathbb{R}$).

Théorème 15.19 : Dérivée d'une fonction définie par une intégrale
H1 Soit une fonction f *continue* sur un *intervalle* I,
H2 Soient $u,v : J \mapsto I$ deux fonctions *dérivables* sur *l'intervalle* J.
Alors la fonction

$$G : \begin{cases} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

est dérivable sur l'intervalle J et

$$\forall x \in J, \quad \boxed{G'(x) = v'(x)f[v(x)] - u'(x)f[u(x)]}$$

Exercice 15-8

Montrer l'inégalité de Poincaré : il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que des bornes a et b telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([a,b]) \text{ telle que } f(a) = 0, \quad \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \leq C \int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 15-9

Soit la fonction

$$g : \begin{cases}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_x^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2 - 1} \end{cases}$$

a) Montrer que g est définie, dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer la fonction dérivée g'. Dresser le tableau de variations de g.

b) Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $g(x)$ et déterminer les limites de la fonction g en 1 et en $+\infty$.

15.3 Changement de variables, intégration par parties.

THÉORÈME 15.20 : **Changement de variables**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. Soit $\varphi : [\alpha,\beta] \mapsto I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\alpha,\beta]$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

En pratique, pour calculer $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, on pose

$$\boxed{x = \varphi(t) \quad \mathrm{d}x = \varphi'(t)\ \mathrm{d}t}$$

On vérifie (rapidement) que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\alpha,\beta]$ vers $[a,b]$, avec $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ et on écrit

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

Ne pas oublier de transformer les bornes !

Exercice 15-10
Calculer $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$, $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x$.

On effectue également un changement de variable de la forme suivante. On veut calculer $I = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$. On pose

$$\begin{cases} t = \psi(x) \\ dt = \psi'(x)dx \end{cases}$$

Dans ce cas, il faut vérifier que la fonction $\psi : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que $\forall x \in [a,b]$, $\psi'(x) \neq 0$. Alors, (puisque ψ' est continue), on a $\psi' > 0$ ou $\psi' < 0$ sur $[a,b]$, et donc la fonction ψ est strictement croissante ou strictement décroissante sur $[a,b]$.
Si par exemple $\psi' > 0$, en notant $\alpha = \psi(a)$ et $\beta = \psi(b)$, la fonction $\psi : [a,b] \mapsto [\alpha,\beta]$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et on note $\phi : [\alpha,\beta] \mapsto [a,b]$ sa bijection réciproque : $\phi = \psi^{-1}$.
On écrit

$$\begin{cases} t = \psi(x) \\ dt = \psi'(x)\ \mathrm{d}x \Rightarrow\ \mathrm{d}x = \dfrac{dt}{\psi'(x)} = \phi'(t)dt \end{cases}$$

Cela se justifie, car si $x \in [a,b]$, en notant $t = \psi(x)$, on a $x = \phi(t)$ et alors $\phi'(t) = \dfrac{1}{\psi'(x)}$ (dérivée d'une bijection réciproque).

Exercice 15-11
Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\ \mathrm{d}x$.

Exercice 15-12
Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\ \mathrm{d}x$. Calculer ensuite ces intégrales.

Exercice 15-13
Soit $f : [-a,a] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Si la fonction f est paire, montrer que $\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x$
2. Si f est impaire, montrer que $\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$.

Exercice 15-14
Calculer pour $a < b$, l'intégrale $\int_a^b (t-a)^3(b-t)^2\ \mathrm{d}t$.

Remarque 174. Pour calculer une intégrale du type $\int_a^b f(x^n)\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, effectuer le changement de variables $y = x^n$.

Exercice 15-15

Calculer $\int_1^2 \dfrac{1}{x(1+x^n)}\,\mathrm{d}x$ $(n \geq 1)$.

THÉORÈME 15.21 : **Intégration par parties**
Soient deux fonctions $u,v : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 15-16

Calculer $F(x) = \int_0^x \arctan x\,\mathrm{d}x$ et $I_{p,q} = \int_a^b (x-a)^p(b-x)^q\,\mathrm{d}x$.

Exercice 15-17

Soit $I_n = n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Trouver $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 15-18

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$.
Montrez que

$$\int_a^b \sin(nt)f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

15.4 Formules de Taylor.

On considère ici une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ $(n \geq 2)$ sur $[a,b]$. Partons du théorème fondamental

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

et intégrons par parties en posant:

$$u(t) = f'(t), \quad u'(t) = f''(t), \quad v'(t) = 1, \quad v(t) = -(x-t)$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

Par intégrations par parties successives, on obtient le :

THÉORÈME 15.22 : **Formule de Taylor avec reste intégral**
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, et deux points $a,x \in I$. Alors

$$\boxed{f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}$$

En faisant le changement de variables $u = (t-a)/(x-a)$ dans le reste intégral, on trouve

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(a+(x-a)u)\,\mathrm{d}u$$

Notons

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a), \quad R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(a+(x-a)u)\,\mathrm{d}u$$

$T_n(x)$ est un polynôme de degré n et $R_n(x)$ s'appelle le reste intégral.
En majorant le reste intégral, on trouve le théorème suivant :

Théorème 15.23 : Inégalité de Taylor-Lagrange
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et un point $a \in I$. Alors, si $x \in I$, on peut écrire $f(x)$ comme somme du polynôme de Taylor et d'un reste $R_n(x)$:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

avec la majoration suivante du reste :

$$\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}(x)}$$

où $M_{n+1}(x) = \sup_{t \in [a,x]} |f^{(n+1)}(t)|$.

Théorème 15.24 : Formule de Taylor-Young
Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, et $a \in I$. Alors $\forall x \in I$,

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + (x-a)^n \varepsilon(x)}$$

où $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

Remarque 175. La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange permettent d'exprimer $f(x)$ en fonction des dérivées de f en a, pour un réel $x \in I$. On les utilise surtout pour des majorations *globales* sur un intervalle.
La formule de Taylor-Young quant à elle, donne une information *locale* sur le comportement de f au voisinage du point a (l'information sur le reste est une limite). On s'en servira pour le calcul de limites, d'équivalents et de développements limités au voisinage du point a.

Exercice 15-19
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ sur le segment $[-a,a]$.

1. Majorer $\left| \frac{f(h)-f(0)}{h} - f'(0) \right|$ en fonction de h ;
2. Trouver un équivalent de la quantité précédente lorsque $h \to 0$;
3. Majorer $\left| \frac{f(h)-f(-h)}{2h} - f'(0) \right|$ en fonction de h.

Exercice 15-20
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ sur le segment $[-1,1]$. Pour un réel positif $0 < |h| < 1$, on pose

$$\varphi(h) = \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2}$$

Calculer $l = \lim_{h \to 0} \varphi(h)$, puis majorer en fonction de h la quantité $|\varphi(h) - l|$.

Exercice 15-21
Majorer la quantité $\left| e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2}) \right|$ sur le segment $[0,1]$. Majorer ensuite la quantité $\left| \ln(1+x) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) \right|$ sur le segment $[0,1]$.

Exercice 15-22
Trouver $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

15.5 Méthodes numériques de calcul d'intégrales.

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et l'on note $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
On notera $M_0 = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$, $M_1 = \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$ et $M_2 = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ (qui existent car les fonctions f, f', f'' sont continues sur le segment $[a,b]$ et sont donc bornées). Dans les deux méthodes qui suivent, on fera une subdivision du segment $[a,b]$ de pas constant $h = (b-a)/n$. On pose pour un entier $k \in [\![0,n]\!]$, $x_k = a + k\frac{b-a}{n} = a + kh$.

THÉORÈME 15.25 : **Méthode des rectangles**
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Posons pour un entier $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

La quantité R_n représente la somme des aires des rectangles de la figure 15.5. On obtient la majoration de l'erreur commise en approximant l'intégrale de la fonction f par R_n :

$$|I - R_n| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1$$

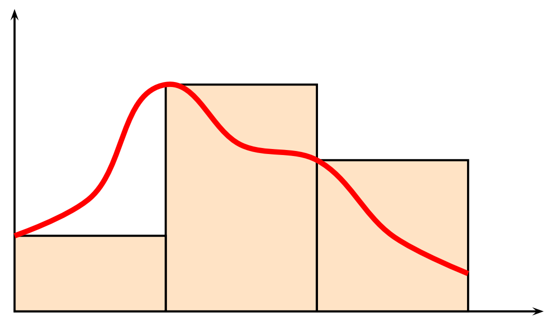

FIG. 15.5 – *Méthode des rectangles*

THÉORÈME 15.26 : **Convergence d'une somme de Riemann**
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.
On définit les suites de termes généraux :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Alors

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 176. Plus généralement, si f est une fonction continue sur le segment $[a,b]$, et si

$$u_n = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$$

où les points ξ_k sont dans l'intervalle $[a+kh, a+(k+1)h]$, avec $h = \frac{b-a}{n}$, on a

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 177. Lorsque l'on peut faire apparaître un groupement k/n dans une suite définie par une somme, penser à utiliser les sommes de Riemann.

Exercice 15-23

Etudier les suites de terme général :

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$;
2. $v_n = \sum_{p=0}^{n-1} \dfrac{\sqrt{n^2+p^2}}{n^2}$;
3. $w_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \dfrac{1}{2k+1}$.

THÉORÈME 15.27 : **Approximation d'une fonction $\mathcal{C}^2$ par une fonction affine**
Soit $[\alpha,\beta]$, une fonction $f \in \mathcal{C}^2([\alpha,\beta])$ et une fonction affine φ telle que $\varphi(\alpha) = f(\alpha)$ et $\varphi(\beta) = f(\beta)$. On montre la majoration suivante de l'erreur commise en approximant la fonction f par la fonction affine φ sur le segment $[\alpha,\beta]$:

$$\forall t \in [\alpha,\beta], \quad |f(t) - \varphi(t)| \leq \frac{(t-\alpha)(\beta-t)}{2} M_2$$

où $M_2 = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f''(x)|$.

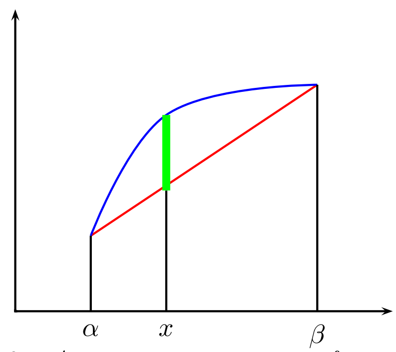

FIG. 15.6 – *Approximation par une fonction affine*

THÉORÈME 15.28 : **Méthode des trapèzes**
On pose pour un entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{2n} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \\ &= \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{2} f(a) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(b) \right] \\ &= R_n + \frac{b-a}{n} \times \frac{f(b) - f(a)}{2} \end{aligned}$$

Cette quantité représente la somme des aires des trapèzes de la figure 15.5. On montre d'abord la majoration de l'erreur commise en approximant l'intégrale de f sur un petit segment $[x_k,x_{k+1}]$ par l'aire d'un trapèze :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, \mathrm{d}t - \frac{b-a}{2n}[f(x_k) + f(x_{k+1})] \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^3} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} |f''(x)|$$

Ensuite l'erreur globale commise en approximant l'intégrale de f sur $[a,b]$ par la somme des aires des trapèzes :

$$|I - T_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

15.6 Fonctions à valeurs complexes

DÉFINITION 15.8 : **Intégrale d'une fonction complexe**
Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, on définit $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i \int_a^b f_2(t)dt$

Remarque 178. Les techniques de changement de variables et d'intégration par parties sont encore valables pour les intégrales de fonctions à valeurs complexes.

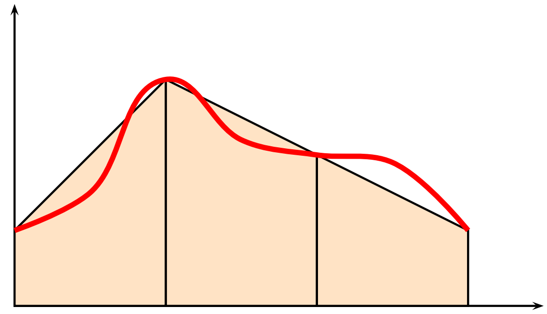

FIG. 15.7 – *Méthode des trapèzes*

THÉORÈME 15.29 : **Majoration du module d'une intégrale complexe**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ continue sur le segment $[a,b]$. On peut majorer le module de l'intégrale par l'intégrale du module :

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$$

avec égalité si et seulement si la fonction f est de la forme $f(t) = h(t)e^{i\theta}$ avec h une fonction réelle positive. En d'autres termes, il y a égalité si et seulement si la fonction complexe f prend ses valeurs dans une demi-droite issue de l'origine.

THÉORÈME 15.30 : **Théorème fondamental**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Alors la fonction définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

THÉORÈME 15.31 : **Inégalité des accroissements finis**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t$$

et par majoration, on en déduit l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a) \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

THÉORÈME 15.32 : **Formules de Taylor**
Soit un intervalle I, et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{C}$.

1. **Formule de Taylor-intégrale :** si $[a,x] \subset I$ et si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment $[a,x]$, alors
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t$$
2. **Formule de Taylor-Lagrange :** si $x \in I$, et $h \in \mathbb{R}$ tel que $[x,x+h] \subset I$, et si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment $[x,x+h]$, alors
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + R_n(h)$$
avec $|R_n(h)| \leq \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}h^{n+1}$ où $M_{n+1} = \sup_{t\in[x,x+h]}|f^{(n+1)}(t)|$.
3. **Formule de Taylor-Young :** si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I, et si $a \in I$, alors $\forall x \in I$,
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} + o\big((x-a)^n\big)$$

Remarque 179. La formule de Taylor-Young permet de trouver les développements limités d'une fonction à valeurs complexes.