Chapitre 23

Fonctions de deux variables

23.1 Continuité d'une fonction de deux variables

On munit dans ce chapitre l'espace $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne usuelle : $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Définition 23.1 : Boule ouverte
Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. On appelle *boule ouverte* de centre a et de rayon r,

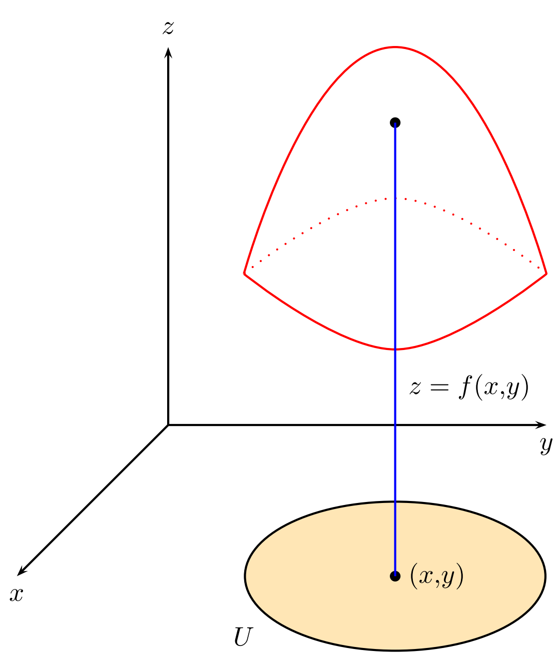
$$B(a,r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$$

Définition 23.2 : Parties ouvertes
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$. On dit que U est une partie *ouverte* si $\forall a \in U$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre a et de rayon r soit incluse dans U.

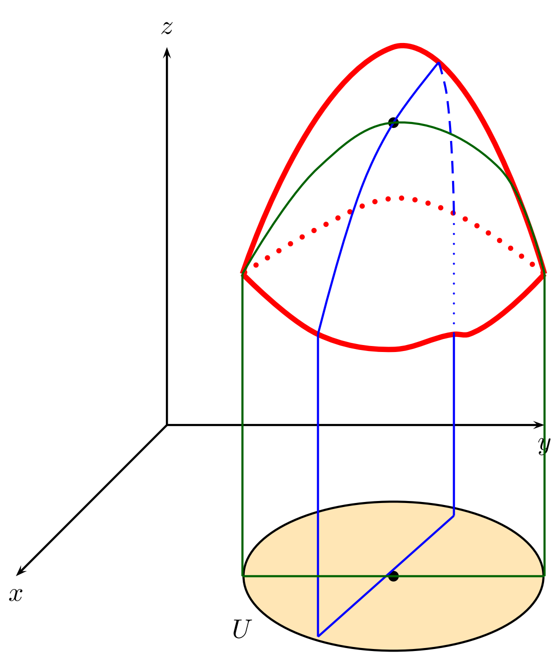
On considère maintenant une partie $U \subset \mathbb{R}^2$ ouverte et une fonction de deux variables :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$$

Remarque 257. Soit un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. L'ensemble $(\mathcal{F}(U,\mathbb{R}), +, ., \times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.



(a) Fonction de deux variables



(b) Applications partielles

Fig. 23.1 – *Fonction de deux variables*

DÉFINITION 23.3 : Continuité

- Soit un point $a = (a_1,a_2) \in U$ et un réel $l \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers la limite l lorsque $x = (x_1,x_2)$ tend vers $a = (a_1,a_2)$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in U,\ \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

- On dit que la fonction f est continue au point $a \in U$ si et seulement si $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$;
- On dit que la fonction f est continue sur l'ouvert U si et seulement si elle est continue en tout point de U.

THÉORÈME 23.1 : Théorème de majoration
On suppose qu'il existe une fonction $\theta : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, on aît pour $l \in \mathbb{R}$:

H1 $|f(x) - l| \leq \theta\left(\|X - a\|\right)$;

H2 $\theta(\rho) \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$;

Alors $f(X) \xrightarrow[X \to a]{} l$.

Exercice 23-1

Soit la fonction de deux variables définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

Étudier la continuité de la fonction f au point $(0,0)$.

Remarque 258. Soient deux fonctions $f,g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ continues au point a. Montrer que les fonctions $f + g$ et fg sont continues au point a. On montre ainsi que l'ensemble des fonctions continues sur un ouvert U est une algèbre.

Remarque 259. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Soit $a \in U$. On suppose que f est continue en a et que g est continue en $f(a)$. Montrer que $g \circ f$ est continue en a.

DÉFINITION 23.4 : Applications partielles
Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$. On définit les deux fonctions d'une variable (applications partielles au point a) par :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t,a_2) \end{array} \right.$$

$$f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a_1,t) \end{array} \right.$$

THÉORÈME 23.2 : Continuité des applications partielles
Si la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est continue au point $a = (a_1,a_2)$, alors la première fonction partielle f_1 est continue au point a_1 et la deuxième fonction partielle f_2 est continue au point a_2. La réciproque est fausse en général.

Exercice 23-2

Etudier la continuité en $(0,0)$ et la continuité des applications partielles de la fonction définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

DÉFINITION 23.5 : **Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$**

Soit une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big) \end{array} \right.$.

1. Soit un point $a = (a_1,a_2) \in U$ et un point $l = (l_1,l_2) \in \mathbb{R}^2$. On dit que f tend vers l lorsque x tend vers a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in U, \quad \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\| \leq \varepsilon$$

2. On dit que la fonction f est continue au point a lorsque $lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

THÉORÈME 23.3 : **Limite d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$**

Avec les notations précédentes,

$$\underset{(i)}{\big(f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l\big)} \iff \underset{(ii)}{\big(f_1(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1 \text{ et } f_2(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_2\big)}$$

THÉORÈME 23.4 : **Continuité d'une composée**

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$. Si f est continue au point $a \in U$ et g est continue au point $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

23.2 Dérivées partielles

On considère une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

DÉFINITION 23.6 : **Dérivée selon un vecteur**

Soit un point $a \in U$ et un vecteur $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^2$ non nul. On dit que la fonction f admet une dérivée selon le vecteur $\overrightarrow{h}$ si et seulement si :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\overrightarrow{h}) - f(a)}{t} \text{ existe}$$

On note alors cette limite $D_{\overrightarrow{h}} f(a)$.

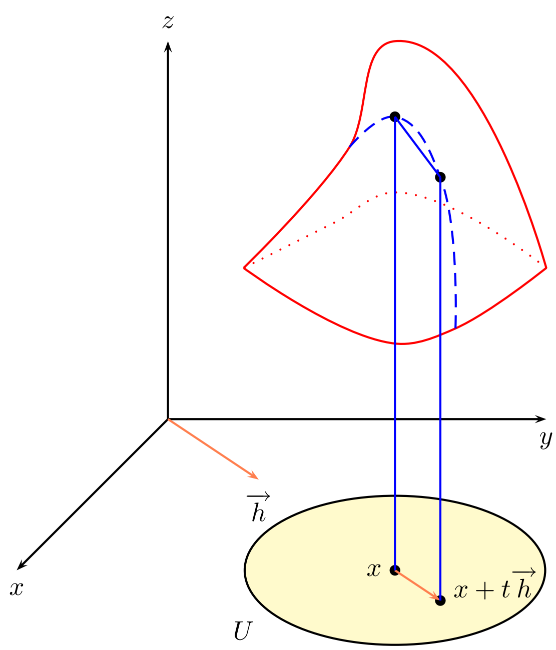


FIG. 23.2 – *Dérivée selon un vecteur*

Remarque 260. On considère dans cette définition la restriction de f à la droite passant par a dirigée par le vecteur $\overrightarrow{h}$: $\phi(t) = f(a + t\overrightarrow{h})$ et la dérivée selon le vecteur $\overrightarrow{h}$ est la dérivée en $t = 0$ de la fonction d'une variable $\phi(t)$.

Exercice 23-3

On considère la fonction de deux variables définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soit un vecteur $\overrightarrow{h} = (a,b)$. Etudier la dérivée de f selon le vecteur $\overrightarrow{h}$ au point $(0,0)$.

Définition 23.7 : Dérivées partielles

On appelle dérivées partielles de f au point a lorsqu'elles existent, les dérivées de f selon les vecteur $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. On note alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1+t,a_2) - f(a_1,a_2)}{t}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,a_2+t) - f(a_1,a_2)}{t}$$

Remarque 261. La recherche de dérivées partielles revient à étudier la dérivabilité des fonctions partielles de f. Pour le calcul pratique, on dérive par rapport à une variable en fixant l'autre constante.

Exercice 23-4

Calculer les dérivées partielles de $f(x,y) = x\cos(xy^2) + ye^x$.

Définition 23.8 : Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existent en tout point $(x_0,y_0) \in U$;
2. les deux fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U.

Exercice 23-5

Soit la fonction de deux variables définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Théorème 23.5 : Développement limité à l'ordre 1

Soit une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. Alors Il existe une fonction $\varepsilon : V_0 \mapsto \mathbb{R}$ définie sur un voisinage de $(0,0)$ telle que :

1. $\forall a \in U$, $\forall h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a + h \in U$,
$$f(a+h) = f(a) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2\right) + \|h\|\varepsilon(h)$$
2. $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

On dit que la fonction f admet un *développement limité à l'ordre* 1 au point a.

Théorème 23.6 : Classe $\mathcal{C}^1$ implique continuité

Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U, alors elle est continue sur U.

Définition 23.9 : Différentielle

Si une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U, pour un point $a \in U$, on note

$$df_a : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h = (h_1,h_2) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 \end{cases}$$

df_a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ qui s'appelle la *différentielle* de f au point $a \in U$.

Définition 23.10 : Gradient
Si $f : U \mapsto \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ sur U et $a \in U$, alors puisque df_a est une forme linéaire, d'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, \boxed{df_a(h) = (\nabla f(a) \mid h)}$$

Ce vecteur s'appelle le *gradient* de f au point a. Si l'on utilise le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$, le théorème précédent donne :

$$\boxed{\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)}$$

Théorème 23.7 : Différentielle et dérivée selon un vecteur
Si la fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U, alors pour tout point $a \in U$ et tout vecteur $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction f admet une dérivée selon le vecteur h au point a et

$$\boxed{D_h f(a) = df_a(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 = (\nabla f(a) \mid h)}$$

Exercice 23-6
Soit $f(x,y) = x^2 e^y + \sin(xy)$, e la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $a = (0,1)$ calculer df_a, $Mat_e(df_a)$, $\nabla f(a)$ et $D_h f(a)$ où $h = (1,2)$.

Théorème 23.8 : Théorèmes généraux
Soient $f,g : U \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Alors
- pour $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
- la fonction $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
- l'ensemble $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U est une algèbre.

Théorème 23.9 : Dérivée d'une composée
Soit une fonction de deux variables $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et deux fonctions d'une variable $u,v : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I telles que $\forall t \in I$, $\phi(t) = \big(u(t),v(t)\big) \in U$. On peut alors définir la fonction d'une variable :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f\big(u(t),v(t)\big) \end{array} \right.$$

Cette fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et

$$\forall t \in I, \quad \boxed{g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(u(t),v(t)\big) \times u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u(t),v(t)\big) \times v'(t)}$$
$$= \big(\nabla f\big(\phi(t)\big) \mid \phi'(t)\big) = df_{\phi(t)}\big(\phi'(t)\big)$$

Exercice 23-7
Soit $f(x,y) = x^2 + xy + e^{x-y}$ et $g(t) = f(e^t,t^2)$. Calculer $g'(0)$.

Remarque 262. La formule précédente est très utile. Elle permet à partir d'une fonction de deux variables d'étudier une fonction partielle d'une seule variable $g(t) = f(a + th)$ et d'utiliser les résultats connus pour les fonctions d'une variable réelle.

Exercice 23-8
Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et un segment $[a,b]$ inclus dans l'ouvert U. On considère la restriction de la fonction f à ce segment :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a + t(b-a)) \end{array} \right.$$

a) Montrer la formule de Taylor intégrale à l'ordre 1 :

$$f(b) = f(a) + (b_1 - a_1)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(a + t(b-a))dt + (b_2 - a_2)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(a + t(b-a))dt$$

b) En déduire l'inégalité des accroissements finis : Si $M = \sup_{x\in[a,b]} \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right|, \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x)\right| \right)$,

$$\left|f(b) - f(a)\right| \leq M\|b-a\|_1$$

Exercice 23-9

Soit $F : I \mapsto \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que la courbe paramétrée est une *courbe de niveau* de f : $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I$, $f\big(F(t)\big) = c$.

a) On considère la fonction d'une variable $g(t) = f\big(F(t)\big)$. Calculer pour $t \in I$, $g'(t)$.

b) En déduire qu'en un point a d'une courbe de niveau C_c de f, le vecteur gradient au point $\nabla f(a)$ est orthogonal à la courbe de niveau.

c) Une application importante : soit $\mathcal{C}$ une courbe de $\mathbb{R}^2$ définie par une équation $f(x,y) = 0$ où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'équation de la tangente en un point (x_0,y_0) de cette courbe est

$$\boxed{(X - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (Y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0}$$

d) Déterminer l'équation de la tangente en un point (x_0,y_0) d'une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

23.3 Extrémas d'une fonction de deux variables

DÉFINITION 23.11 : Extremum

Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in U$. On dit que a est :

- un *maximum local* (strict) de f si et seulement si $\exists r > 0$, tel que $\forall x \in B(a,r) \cap U$,

$$f(x) \leq f(a) \quad \big(f(x) < f(a)\big)$$

- un *minimum local* (strict) de f si et seulement si $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in B(a,r) \cap U$,

$$f(x) \geq f(a) \quad \big(f(x) > f(a)\big)$$

- un *extremum local* de f si et seulement si a est un maximum local ou un minimum local ;
- un *maximum global* si et seulement si $\forall x \in U$, $f(x) \leq f(a)$;
- un *minimum global* si et seulement si $\forall x \in U$, $f(x) \geq f(a)$).

THÉORÈME 23.10 : La différentielle s'annule en un extremum local

Soit une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U. Les points $a \in U$ tels que $df_a = 0$ s'appellent des *points critiques* de f.

Si $a \in U$ est un extremum local de f, alors a est un point critique :

$$df_a = 0 \iff \nabla f(a) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$$

Remarque 263. Les extrémas de f sont à chercher parmi les points critiques de f, mais un point critique ne correspond pas toujours à un extremum : une fois qu'on a déterminé tous les points critiques, il faut faire une étude plus précise.

Exercice 23-10

Etudier les extrémas locaux de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Exercice 23-11

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x+y)^2 + x^4 + y^4$. Déterminer les extrémas locaux et globaux de f.

Exercice 23-12

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = x^2y + \ln(1+y^2)$. Etudier les extrémas de g.

23.4 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition 23.12 : **Dérivées partielles secondes**
Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. On définit les deux fonctions :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : U \mapsto \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} : U \mapsto \mathbb{R}$$

qui sont continues sur U.

1. Si $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(a)$ existe, on note ce réel $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$;
2. Si $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$ existe, on note ce réel $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$;
3. Si $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(a)$ existe, on note ce réel $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$;
4. Si $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$ existe, on note ce réel $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$.

Exercice 23-13

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Etudier l'existence de dérivées partielles secondes de f en $(0,0)$.

Théorème 23.11 : **Théorème de Schwarz**
Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ et $a \in U$. On suppose que :

1. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
2. les fonctions $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ existent sur un voisinage de a ;
3. ces deux fonctions sont continues au point a.

Alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a)$$

On note alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ cette valeur commune.

Définition 23.13 : On définit par récurrence les dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$ d'une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si et seulement si

1. f est de classe $k-1$;
2. Toutes les dérivées partielles $\dfrac{\partial k}{\partial x^p \partial y^q}(a)$ $(p+q=k)$ existent $\forall a \in U$ et sont des fonctions continues sur U.

D'après le théorème de Schwarz, toutes les dérivées partielles croisées sont égales.

Exercice 23-14

Soit $[a,b] \subset U$ un segment et $f : U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. En écrivant la formule de Taylor intégrale pour la restriction de f à ce segment, en déduire la formule de Taylor intégrale pour f :

$$f(b) = f(a) + (\nabla f(a) \mid b-a)$$
$$+(b_1-a_1)^2 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+t(b-a))\,\mathrm{d}t + 2(b_1-a_1)(b_2-a_2)\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+t(b-a))\,\mathrm{d}t$$
$$+(b_2-a_2)^2 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+t(b-a))\,\mathrm{d}t$$

Exercice 23-15

Soit $U = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 | 0 < t < x\}$. Trouver une fonction $u : U \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ de la forme $u(x,t) = f(x/t)$ vérifiant l'équation des ondes :

$$\forall (x,t) \in U, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

Exercice 23-16

Une application $\overrightarrow{F} : U \mapsto \mathbb{R}^2$ s'appelle un *champ de vecteurs*. On dit que le champ de vecteurs dérive d'un potentiel scalaire lorsqu'il existe une application $V : U \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in U, \quad \overrightarrow{F}(x,y) = \nabla V(x,y) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y) \end{array} \right.$$

a. On suppose $\overrightarrow{F}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que si $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel, on doit avoir

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 0$$

23.5 Intégrales doubles

Si une fonction f est constante et vaut α sur un petit pavé $[a,b] \times [c,d]$, on définit son intégrale double comme étant le *volume* de l'espace de base le rectangle $[a,b] \times [c,d]$ et de hauteur α. Ce volume vaut $V = \alpha \times (b-a) \times (d-c)$. On vérifie que

$$V = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y) \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y) \, \mathrm{d}x \Big) \, \mathrm{d}y$$

Pour définir l'intégrale double d'une fonction bornée $f : [a,b] \times [c,d] \mapsto \mathbb{R}$, on commence par subdiviser le rectangle $[a,b] \times [c,d]$ en $n \times p$ petits rectangles, et on définit l'intégrale d'une fonction en escalier (constante sur chacun des rectangles) comme la somme des volumes des parallépipèdes. On définit ensuite l'intégrale supérieure

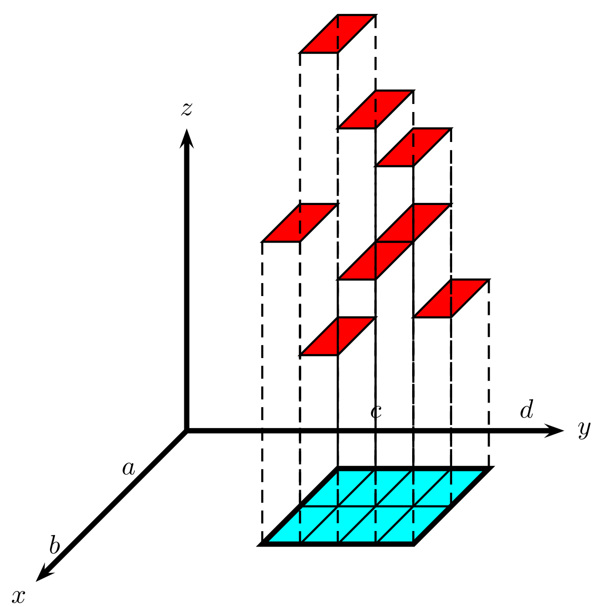


Fig. 23.3 – *Fonction en escalier*

de la fonction f comme étant la borne inférieure des intégrales des fonctions en escalier majorant f, et l'intégrale inférieure de la fonction f comme étant la borne supérieure des intégrales de fonctions en escalier minorant f. Lorsque l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure sont égales, on dit que la fonction f est intégrable, et on note

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

son intégrale. On montre que toute fonction $f : [a,b] \times [c,d] \mapsto \mathbb{R}$ continue est intégrable.
La construction devient beaucoup plus compliquée si l'on considère des domaines $U \subset \mathbb{R}^2$ qui ne sont plus des rectangles. Comment « subdiviser » un tel domaine U ? Quelle régularité imposer à U ? Ce procédé de construction est inadapté, et on utilise une autre définition de l'intégrale : l'intégrale de Lebesgue. Heureusement, les calculs avec l'intégrale de Lebesgue ressemblent aux calculs habituels avec l'intégrale de Riemann. Nous admettrons les résultats qui suivent.
On considère une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$ continue sur une partie $U \subset \mathbb{R}^2$ « admissible » définie à l'aide de deux fonctions d'une variable :

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \text{ et } \phi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

ou alors

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d \text{ et } \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$$

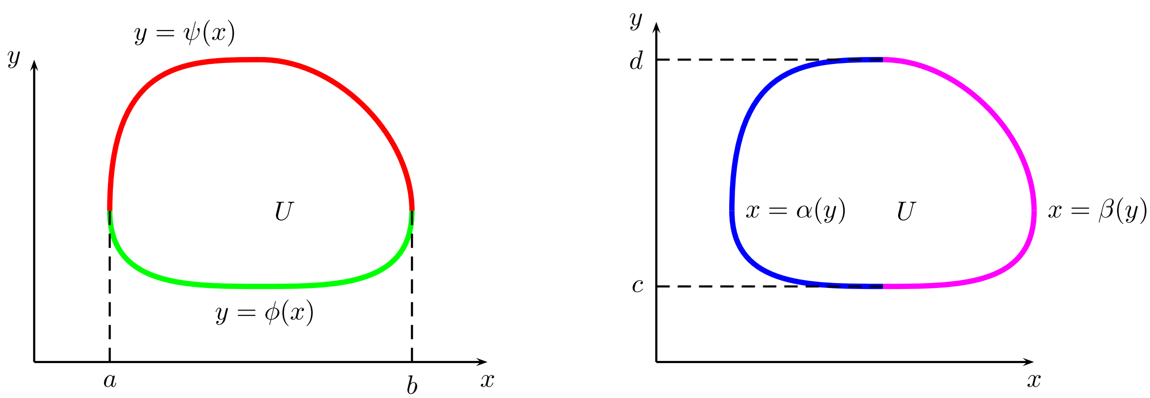


FIG. 23.4 – *un domaine U délimité par le graphe de deux fonctions*

Le théorème suivant permet de calculer une intégrale double sur un tel domaine.

THÉORÈME 23.12 : **Théorème de Fubini**
Si f est une fonction continue sur un domaine $U \subset \mathbb{R}^2$ admissible, alors on peut calculer l'intégrale double de f sur U en calculant deux intégrales simples :

$$\iint_U f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

Exercice 23-17
Calculer $\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}$.

THÉORÈME 23.13 : **Propriétés de l'intégrale double**

1. **Linéarité** :

$$\iint_D (\lambda f + \mu g)(x,y)\,dx\,dy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \mu \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

2. **Additivité** : si $D = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 \cap D_2 = \emptyset$,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

3. **Positivité** : si $f \ge 0$ sur D, alors

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \ge 0$$

23.6 Changement de variables

THÉORÈME 23.14 : **Changement de variables**
Soit un domaine « admissible » $\Delta, D \subset \mathbb{R}^2$ et une application bijective de classe $\mathcal{C}^1$

$$\phi : \begin{cases} \Delta & \longrightarrow & D \\ (u,v) & \mapsto & (x(u,v),y(u,v)) \end{cases}$$

On appelle *Jacobien* de ϕ, au point (u,v), le déterminant

$$J\phi(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Alors

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\,\big|J\phi(u,v)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$$

Deux cas importants de changement de variable sont à connaître :

- Changement de coordonnées affine :
$$\begin{cases} x = au + bv + \alpha \\ y = cu + dv + \beta \end{cases}$$
alors $\boxed{J\phi = (ad - bc)}$
- Changement en coordonnées polaires :
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$
alors $\boxed{J\phi = \rho}$.

Exercice 23-18

Calculer $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

Exercice 23-19

Calculer $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ où le domaine d'intégration D est le demi-disque de rayon 1 de centre $(0,1)$ avec $x \geq 0$.

Exercice 23-20

On définit :

$$F(x) = \int_0^x e^{-x^2}\,dx$$

$$I(R) = \int_{[0,R]\times[0,R]} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$$

a) Montrer que $I(R) = F(R)^2$.

b) Montrer que

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leq I(R) \leq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

c) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} F(R) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

23.7 Aire d'un domaine plan

DÉFINITION 23.14 : Aire d'un domaine plan
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine, on appelle *aire* de D,

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy$$

Remarque 264. L'aire du domaine plan D est donc le volume de base D et de hauteur 1.

Exercice 23-21

Calculer l'aire délimitée par une ellipse d'équation cartésienne

$$D : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

THÉORÈME 23.15 : Aire d'un secteur délimité par une courbe polaire
Soit une courbe polaire d'équation $\rho = \rho(\theta)$ et le domaine Ω délimité par les deux demi-droites d'équation polaire θ_1, θ_2 et par la courbe polaire (voir figure 23.5). Alors l'aire de ce domaine se calcule par la formule :

$$\mathcal{A}(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\ \mathrm{d}\theta$$

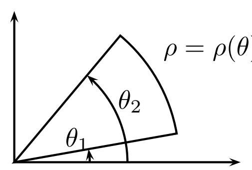


FIG. 23.5 – *Aire délimitée par une courbe polaire*

Exercice 23-22

Calculer l'aire délimitée par une cardioïde d'équation polaire

$$\rho = a(1 + \cos\theta) \quad (a > 0)$$

Exercice 23-23

On considère le limaçon de Pascal d'équation polaire

$$\rho = 2\cos\theta - 1$$

a) Tracer cette courbe.
b) Calculer l'aire entre les deux boucles.
