Chapitre 10

Fonctions d'une variable réelle

10.1 Vocabulaire

On suppose que les fonctions qui interviennent ici sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 10.1 : **Opérations sur les fonctions**
Dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ on définit les lois suivantes :

- Addition : si $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$, on définit l'application $(f+g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ par :
$$\forall x \in I, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
- Multiplication par un réel : si $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit l'application (λf) par :
$$\forall x \in I, \quad (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$$
- Multiplication de deux fonctions : si $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$, on définit l'application $(fg) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ par :
$$\forall x \in I, \quad (fg)(x) = f(x) \times g(x)$$
- Valeur absolue d'une fonction : si $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on définit l'application $(|f|) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ par :
$$\forall x \in I, \quad |f|(x) = |f(x)|$$
- Minimum, maximum de deux fonctions : si $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$, on définit les deux applications $(\max(f,g), \min(f,g)) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$ par :
$$\forall x \in I, \quad \sup(f,g)(x) = \max\{f(x),g(x)\}$$
$$\forall x \in I, \quad \inf(f,g)(x) = \min\{f(x),g(x)\}$$

Définition 10.2 : **Fonctions bornées**

- On dit qu'une fonction f est majorée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in I$, $f(x) \leq M$.
- On dit qu'une fonction f est minorée si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in I$, $f(x) \geq m$.
- On dit qu'une fonction est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

Proposition 10.1 : **Pour montrer qu'une fonction est bornée, il suffit de la majorer en valeur absolue**
Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si
$$\exists M > 0 \ \forall x \in I, \ |f(x)| \leq M$$

DÉFINITION 10.3 : Voisinage d'un point de I

- Soit un réel $a \in \mathbb{R}$. On appelle *voisinage du point* a, une partie $V \subset \mathbb{R}$ telle que $\exists \alpha > 0$, $]a-\alpha, a+\alpha[\subset V$. On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages du point a ;
- Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ si et seulement si il existe $A > 0$ tel que $]A, +\infty[\subset V$.
- Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ si et seulement si il existe $B < 0$ tel que $]-\infty, B[\subset V$.

DÉFINITION 10.4 : Adhérence d'une partie

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que le point x est *adhérent* à la partie A si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A \text{ tq } |x-a| \leq \varepsilon$$

On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.

Remarque 82. Lorsque A est un intervalle, les points adhérents à A sont les éléments de A et les extrémités de l'intervalle.

DÉFINITION 10.5 : Extremum

On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un maximum de f si et seulement si il existe $a \in I$ tel que $f(a) = M$ et si, pour tout x de I, $f(x) \leq f(a)$ (on dit aussi que f présente en a un maximum). On définit de même un minimum et on parlera d'extremum lorsqu'on aura un maximum ou un minimum. On notera :

$$M = \max_{x \in I} f(x)$$

$$m = \min_{x \in I} f(x)$$

DÉFINITION 10.6 : Extremum local

On dit que $M = f(a)$ est un extremum local de f si et seulement si il existe un voisinage V de a tel que la restriction de f à ce voisinage présente en a un extremum.

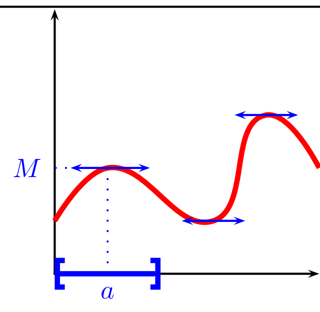

FIG. 10.1 – *Extrémas locaux*

DÉFINITION 10.7 : Fonctions monotones

On dit que f est croissante sur I si et seulement si $\forall (x,y) \in I^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
On dit que f est décroissante sur I si et seulement si $\forall (x,y) \in I^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
On dit que f est monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante.
On dit que f est *strictement* croissante sur I si et seulement si $\forall (x,y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
On dit que f est *strictement* décroissante sur I si et seulement si $\forall (x,y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

PROPOSITION 10.2 : Règle des signes

Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : J \mapsto \mathbb{R}$ sont monotones, et si $f(I) \subset J$, on peut définir $f \circ g : I \mapsto \mathbb{R}$. Alors $g \circ f$ est monotone et l'on a la règle des signes pour la monotonie de $g \circ f$:

f	g	$g \circ f$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Définition 10.8 : **Fonctions paires, impaires**
Soit un intervalle I symétrique par rapport à 0. On dit que f est *paire* si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f(-x) = f(x)$$

et que f est *impaire* si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f(-x) = -f(x)$$

Définition 10.9 : **Fonctions périodiques**
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique si et seulement si

$$\exists T > 0, \quad \forall x \in I, \quad f(x+T) = f(x)$$

Définition 10.10 : **Fonctions lipschitziennes** [a]
Une fonction f est lipschitzienne sur une partie I si et seulement si

$$\boxed{\exists k > 0 \text{ tq } \forall (x,y) \in I^2, \ \left|f(x) - f(y)\right| \leq k|x-y|}$$

[a] Rudolf Lipschitz (14/05/1832 – 07/10/1903), Allemand. A contribué à plusieurs branches des mathématiques : fonctions de Bessel, séries de Fourier, géométrie Riemannienne, mécanique. . .

Proposition 10.3 : **Composée de fonctions lipschitziennes**
Si f et g sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$, alors $f \circ g$ l'est aussi.

Exercice 10-1
Montrer que si f est lipschitzienne sur $[a,b]$ et $[b,c]$ alors f est lipschitzienne sur $[a,c]$.

Exercice 10-2
Soit une fonction f lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Montrez qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leq a|x| + b$$

10.2 Étude locale d'une fonction

Définition 10.11 : **Limite d'une fonction**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, un point $a \in \overline{I}$ (éventuellement infini), et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ si et seulement si :

$$\forall W \in \mathcal{V}_l \ \exists V \in \mathcal{V}_a \ \text{ tq } \ f(I \cap V) \subset W$$

Lorsque $a \in \mathbb{R}$ est fini, et la limite $l \in \mathbb{R}$ est finie, cette définition se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \ \text{ tq } \ \forall x \in I, |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Lorsqu'un tel l existe, on dit que l est la *limite* de f en a et l'on note alors

$$l = \lim_{x \to a} f(x)$$

Remarque 83. Voici quelques traductions de la définition de limite :

$$\left(f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty\right) \iff \left(\forall B < 0, \exists \ A > 0 \ \text{ tq } \ \forall x \in I, \, x \geq A \Rightarrow f(x) \leq B\right)$$

$$\left(f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} l\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \ B < 0 \ \text{ tq } \ \forall x \in I, \, x \leq B \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon\right)$$

Remarque 84. On peut utiliser des inégalités strictes dans la définition de la limite.

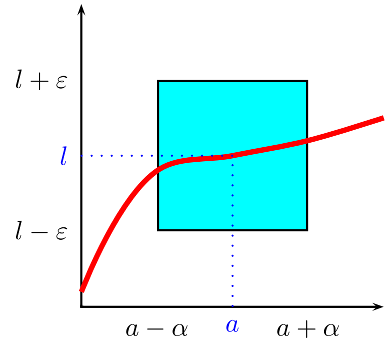

FIG. 10.2 – *Limite d'une fonction*

DÉFINITION 10.12 : **Continuité en un point**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et un point $a \in I$. On dit que la fonction f est *continue* au point $a \in I$ lorsque

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$$

Avec des quantificateurs :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tq } \forall x \in I,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon}$$

DÉFINITION 10.13 : **Limite à gauche, limite à droite**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} l$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tq } \forall x \in I, \quad a - \alpha \leq x < a \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On définit de même la limite à droite

Remarque 85. On peut aussi définir la continuité à droite et à gauche en un point a.

DÉFINITION 10.14 : **Prolongement par continuité**
Si la fonction f a une limite finie en une extrémité $a \notin I$ de l'intervalle I, alors on pourra prolonger f en une fonction

$$\widetilde{f} : \begin{cases} I \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \lim_{x \to a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases} \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ est continue au point a. On dit que $\widetilde{f}$ est le prolongement par continuité de f au point a.

THÉORÈME 10.4 : **Unicité de la limite**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$, et un point $a \in \overline{I}$. Si $l = \lim_{x \to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ existe, alors cette limite est unique.

THÉORÈME 10.5 : **Une fonction admettant une limite finie est localement bornée**
Toute fonction admettant une limite finie en un point de $\overline{\mathbb{R}}$ est bornée sur un voisinage de ce point.

THÉORÈME 10.6 : **La connaissance d'une limite fournit une inégalité**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$, et un point $a \in \overline{I}$. Soient deux réels $(k,k') \in \mathbb{R}^2$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Si

- H1 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$;
- H2 $k < l < k'$;

Alors, il existe un voisinage V de a sur lequel

$$\forall x \in V, \quad k \leq f(x) \leq k'$$

THÉORÈME 10.7 : **Opérations algébriques sur les limites**
On suppose que les fonctions f et g ont une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l' \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. la fonction $|f|$ a une limite en a et
$$|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} |l|$$
2. lorsque $l + l'$ n'est pas une forme indéterminée, la fonction $(f+g)$ a une limite en a et
$$(f+g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} l + l'$$
3. lorsque ll' n'est pas une forme indéterminée, la fonction (fg) a une limite en a et
$$(fg)(x) \xrightarrow[x \to a]{} ll'$$
4. lorsque $l \neq 0$, il existe un voisinage V du point a sur lequel la fonction f ne s'annule pas, et alors la restriction de $1/f$ à ce voisinage a une limite en a et
$$(1/f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1/l$$
5. lorsque $l' \neq 0$, il existe un voisinage V du point a sur lequel la fonction (f/g) ne s'annule pas et alors
$$(f/g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} l/l'$$

Exercice 10-3

Soient deux fonctions $f,g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues en un point x_0. Montrer que :
a) Les fonctions $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = \max(-f,0)$ sont continues au point x_0.
b) Les fonctions $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont continues au point x_0.

THÉORÈME 10.8 : **Passage à la limite dans les inégalités**
Soient deux fonctions $f,g : I \mapsto \mathbb{R}$, un point $a \in \overline{I}$. On suppose que les fonctions f et g admettent une limite en a et que :

H1 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l'$;

H2 Sur un voisinage V du point a, $f(x) \leq g(x)$.

Alors $l \leq l'$.

THÉORÈME 10.9 : **Théorème de majoration**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$, un point $a \in \overline{I}$ et un réel $l \in \mathbb{R}$. Soit θ une fonction définie sur un voisinage V de a. On suppose que :

H1 $\forall x \in V$, $|f(x) - l| \leq \theta(x)$;

H2 $\theta(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

Alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$.

THÉORÈME 10.10 : **Théorème des gendarmes**
Soient α,f,β trois fonctions définies sur un voisinage V du point a, et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall x \in V$, $\alpha(x) \leq f(x) \leq \beta(x)$;

H2 $\alpha(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$, $\beta(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$.

Alors la fonction f admet une limite au point a et
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$$

Remarque 86. Ce théorème se généralise aux limites infinies. Par exemple, si sur un voisinage de $a \in \overline{I}$, on a :

H1 $f(x) \geq \alpha(x)$

H2 $\alpha(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$

Alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

Remarque 87. Ne pas confondre le théorème des gendarmes et le passage à la limite dans les inégalités : le théorème des gendarmes donne l'existence de la limite de f, alors que pour passer à la limite dans les inégalités, il faut supposer que f admet une limite.

Exercice 10-4

Déterminez si elle existe la limite $\lim_{x\to 0^+} xE(1/x)$.

THÉORÈME 10.11 : **Composition de limites**

Soient deux intervalles $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : I \mapsto J$, $g : J \mapsto \mathbb{R}$. Soient un point $a \in I$ et un point $b \in \overline{J}$. On suppose que :

- H1 $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$;
- H2 $g(y) \xrightarrow[y\to b]{} l$.

Alors

$$g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$$

THÉORÈME 10.12 : **Image d'une suite par une fonction.**

Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in I$. Soit une suite (u_n) de points de l'intervalle I. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :

- H1 $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$
- H2 $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$

Alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

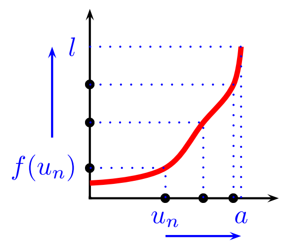

FIG. 10.3 – *Image d'une suite par une fonction*

Remarque 88.

1. Ce théorème est utile pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en a. Il suffit pour cela d'exhiber deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers a mais telles que les suites $\big(f(u_n)\big)$ et $\big(f(v_n)\big)$ ne convergent pas vers la même limite.
2. On utilise également ce théorème dans l'étude des suites récurrentes

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Si la suite (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, et si la fonction f est continue au point l, alors la limite de la suite récurrente est un point fixe de la fonction :

$$l = f(l)$$

Exercice 10-5

Montrez que la fonction définie par $f(x) = \sin(1/x)$ n'admet pas de limite lorsque $x \to 0^+$.

Exercice 10-6

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ périodique. Montrez que si $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie, alors la fonction f est constante.

THÉORÈME 10.13 : **Caractérisation séquentielle de la continuité en un point**

Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in I$. La fonction f est continue au point a si et seulement si pour *toute* suite (x_n) de points de I convergeant vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)$ converge vers $f(a)$.

THÉORÈME 10.14 : **Théorème de la limite monotone**
Soient deux réels $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Si $f :]a,b[\mapsto \mathbb{R}$ est une fonction *croissante*, alors il n'y a que deux possibilités :

1. f est majorée, et alors f admet une limite finie lorsque $x \to b$;
2. f n'est pas majorée, et alors $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to b$.

De même,

1. f est minorée et alors f admet une limite finie lorsque $x \to a$;
2. f n'est pas minorée et alors $f(x) \to -\infty$ lorsque $x \to a$.

On a les résultats correspondants lorsque f est décroissante.

10.3 Etude locale d'une fonction

DÉFINITION 10.15 : **Notations de Landau**

– $f = o(g)$ (la fonction f est *négligeable* devant la fonction g au voisinage du point a) si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists V_a \in \mathcal{V}_a$, voisinage du point a tel que

$$\forall x \in V_a, \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

Si la fonction g ne s'annule pas, c'est équivalent à dire que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

– $f = O(g)$ (la fonction f est *dominée* par la fonction g au voisinage du point a) si et seulement si $\exists M > 0$, $\exists V_a \in \mathcal{V}_a$, voisinage du point a tels que

$$\forall x \in V_a, \quad |f(x)| \leq M |g(x)|$$

Lorsque la fonction g ne s'annule pas, c'est équivalent à dire que la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage du point a.

PROPOSITION 10.15 : **Opérations sur les relations de comparaisons**

– $f = o(g)$, $g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$ (idem avec O).
– $f_1 = o(g)$, $f_2 = o(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(g)$ (idem avec O),
– $f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$ (idem avec O).

DÉFINITION 10.16 : **fonctions équivalentes**
Soient deux fonctions $f,g : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{I}$. On dit que les fonctions f et g sont *équivalentes* au voisinage du point a lorsque

$$f - g = o(g)$$

Lorsque g ne s'annule pas sur un voisinage de a, cela revient à dire que :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$$

Remarque 89. La relation $\sim$ sur $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est une relation d'équivalence.

Remarque 90.

– Ne JAMAIS écrire $f \sim 0$ bien que cela ait une signification précise (i.e. f est nulle dans un voisinage de a).
– Il ne faut pas confondre cette notation avec celle de certains physiciens $f \simeq g$ ($\cos x \simeq 1 - x^2/2$ qui est un développement limité caché alors que $\cos x \sim 1$!).
– Le principal intérêt des équivalents est de remplacer localement une fonction compliquée par une fonction plus simple (par exemple pour la recherche de limites). Par exemple, au voisinage de $+\infty$, $x^2 + x \sim x^2$, mais également $x^2 + x \sim x^2 + 2x + 1$ .... On choisira le premier équivalent en pratique car il est le plus simple à manier

Théorème 10.16 : Un équivalent donne localement le signe
Soient deux fonctions $f,g : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{I}$. Si au voisinage du point a, $f \sim g$ alors, il existe un voisinage V de a sur lequel f et g ont même signe.

Comme avec les suites, on a les propriétés suivantes :

Théorème 10.17 : Opérations sur les équivalents
Soient deux fonctions $f,g : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{I}$.

1. $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$;
2. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$ et $l \neq 0 \Rightarrow f \underset{x\to a}{\sim} l$;
3. $f_1 \underset{x\to a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x\to a}{\sim} g_2 \Rightarrow f_1 f_2 \underset{x\to a}{\sim} g_1 g_2$ (et $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$) ;
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ (indépendant de x !). Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$, f et g sont positives alors $f^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g^\alpha$.

Remarque 91.

- Le symbole $\sim$ ne se manipule pas comme le signe $=$. Notamment lorsqu'on a une somme ; dans ce dernier cas, utiliser un développement limité (voir cours futur).
- *On peut prendre des produits, quotients, puissances d'équivalents, mais jamais des sommes, exponentielle ou logarithme d'équivalents.*
- Il est souvent intéressant de mettre en facteur un terme prédominant ou alors l'équivalent deviné dans une somme.

Un exemple à méditer :

1. $f(x) = x^2 + x$
2. $g(x) = -x^2$
3. $h(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

Au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2, \quad g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2, \quad h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$$

Mais pourtant :

- $f(x) + g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$
- $h(x) + g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$
- $e^{f(x)} \not\sim e^{x^2}$, $e^{h(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{x^2}$

Théorème 10.18 : Comparaison des fonctions usuelles
Soient $\alpha,\beta,\gamma > 0$ trois réels.

- Comparaison ln et puissance :
  - en $+\infty$: $(\ln x)^\gamma = o(x^\alpha)$,
  - en 0 : $|\ln x|^\gamma = o(\dfrac{1}{x^\alpha})$,
- Comparaison puissance et exponentielle :
  - en $+\infty$: $x^\alpha = o(e^{\beta x})$,
  - en $-\infty$: $e^{\beta x} = o(\dfrac{1}{x^\alpha})$.

On retient qu'aux bornes des intervalles de définition,

L'exponentielle l'emporte sur la puissance, la puissance l'emporte sur le logarithme.

Equivalents classiques lorsque
$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$
Au voisinage de a :
- $\ln(1+f(x)) \sim f(x)$
- $\sin(f(x)) \sim f(x)$
- $\tan(f(x)) \sim f(x)$
- $[1-\cos(f(x)] \sim \dfrac{f(x)^2}{2}$
- $\left[e^{f(x)}-1\right] \sim f(x)$
- $[(1+f(x))^\alpha - 1] \sim \alpha f(x)$

Remarque 92. **Forme indéterminée** 1^∞
Pour étudier une fonction de la forme
$$f(x) = (a(x))^{b(x)}$$
l'écrire sous la forme
$$e^{b(x)\ln(a(x))}$$

Exercice 10-7

Montrez que $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Une erreur courante est de dire que lorsque $x \to 0$, $1+x$ se rapproche de 1 et donc la fonction tend vers 1 !

10.4 Propriétés globales des fonctions continues

Définition 10.17 : **Fonctions continues sur un intervalle**
On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si et seulement si la fonction f est continue en chaque point de I, ce qui se traduit avec des quantificateurs de la manière suivante :
$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x-a| \le \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \le \varepsilon$$
On note $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Remarque 93. Le fait qu'une fonction soit continue sur un intervalle I, correspond intuitivement au fait que l'on puisse tracer sa courbe représentative sans lever le crayon. La continuité en un point est une notion locale, alors que la continuité sur un intervalle est une notion globale.

Théorème 10.19 : **Une fonction lipschitzienne est continue**
Si une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est K-lipschitzienne sur I, alors f est continue sur l'intervalle I.

Exercice 10-8

Les fonctions
- $x \mapsto x^2$;
- $x \mapsto \sqrt{x}$;

sont-elles lipschitziennes, continues sur $[0,+\infty[$?

Exercice 10-9

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, avec $0 < K < 1$. On dit que la fonction f est *contractante*).
On considère la suite récurrente définie par :
$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrez que si la fonction f admet un point fixe l alors il est unique ;
2. On suppose que la fonction f admet un point fixe l. Montrez que la suite (u_n) converge vers ce point fixe l.

Exercice 10-10

1. Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe une suite de rationnels (r_n) qui converge vers ce réel x ;

2. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

   En notant $\alpha = f(1)$, déterminer pour $p \in \mathbb{N}$, la valeur de $f(p)$, puis pour $p \in \mathbb{Z}$, calculez $f(p)$ et ensuite déterminez $f(1/q)$ et $f(p/q)$ pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$;

3. Déterminer alors toutes les fonctions f *continues* vérifiant la relation ci-dessus (ce sont les morphismes continus du groupe $(\mathbb{R},+)$).

Théorème 10.20 : **Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.)**
Soit un *intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Soit deux réels $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$. On suppose que

1. la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$;
2. $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$;

Alors, il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

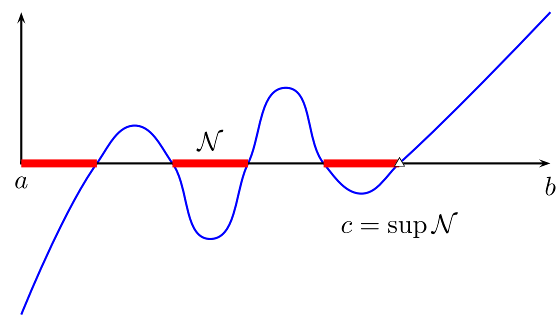

Fig. 10.4 – *Démonstration du TVI*

Corollaire 10.21 : **Autre forme du TVI**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un segment $[a,b] \subset I$. On suppose la fonction f continue sur le segment $[a,b]$. Soit un réel $t \in [f(a),f(b)]$. Alors il existe un réel $z \in [a,b]$ tel que $f(z) = t$.

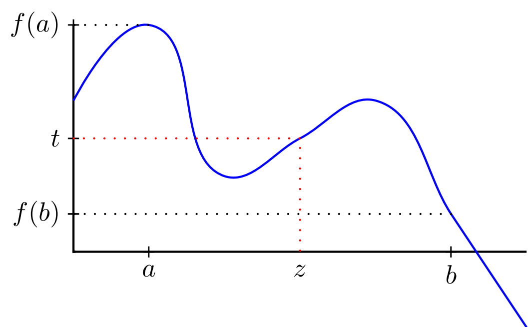

Fig. 10.5 – *TVI deuxième forme*

Corollaire 10.22 : **Image continue d'un intervalle**
Soit un intervalle I et une fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ continue sur cet intervalle. Alors, la partie $f(I)$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 10-11

Soit une fonction $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ continue. Montrez qu'elle admet un point fixe.

Exercice 10-12

Soit une fonction polynômiale $P : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de degré impair. Montrer que P s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Théorème 10.23 : Théorème de la bijection
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$. On note $J = f(I)$. On suppose que la fonction f est :

1. continue sur I ;
2. strictement monotone sur I.

Alors la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J, et sa bijection réciproque $f^{-1} : J \mapsto I$ est une fonction continue strictement monotone de même sens que f.

Remarque 94. Soit un intervalle $I = [a,b[$ (les bornes peuvent être infinies), et une fonction $f : I \mapsto J = f(I)$ strictement croissante sur l'intervalle I. D'après le théorème de la limite monotone,

$$\alpha = \lim_{x \to a} f(x) \text{ et } \beta = \lim_{x \to b} f(x) \text{ existent}$$

(ces limites sont finies ou infinies). Alors $J = [\alpha,\beta[$. On remarque que les bornes de J sont fermées (resp. ouvertes) lorsque celles correspondantes de I sont fermées (resp. ouvertes).

Exercice 10-13

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 \end{array} \right.$$

1. Montrez qu'il existe un unique réel $u_n \in [0,1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$;
2. Montrez que la suite (u_n) converge ;
3. Déterminez la limite de la suite (u_n).

Remarque 95. Si les bijections f et f^{-1} sont deux fonctions continues monotones, alors les courbes représentatives de f et f^{-1} se déduisent l'une de l'autre par une symétrie par rapport à la première bissectrice.

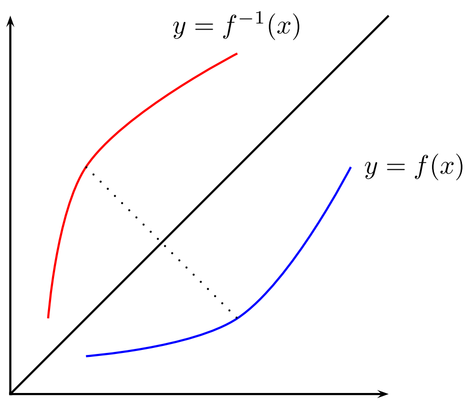

Fig. 10.6 – *Bijection et bijection réciproque*

Théorème 10.24 : Recherche d'un zéro par dichotomie
On considère une fonction continue $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On suppose que la fonction f ne s'annule qu'un un seul point $c \in]a,b[$. On construit deux suites récurrentes (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \\ \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \\ b_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Alors les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers c, et si l'on choisit de prendre a_n comme valeur approchée de c, on obtient la majoration de l'erreur suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |c - a_n| \leq \frac{b - a}{2^n}$$

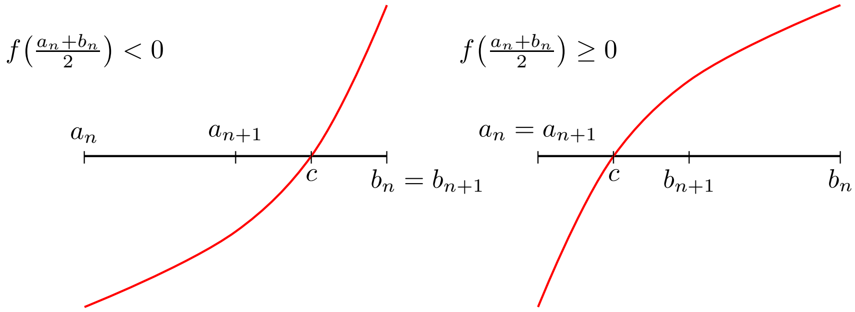

FIG. 10.7 – *Recherche d'un zéro par dichotomie*

> THÉORÈME 10.25 : **Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes**
> Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur un *segment*. Alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes :
> $$\exists (x_1,x_2) \in [a,b]^2 \text{ tq } f(x_1) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } f(x_2) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

Remarque 96. Une autre façon de citer ce théorème : une fonction continue sur un *segment* possède un maximum et un minimum.

Remarque 97.

- $I =]0,1[$, $f(x) = 1/x$: la fonction f est continue sur I mais pas bornée (I n'est pas un segment) ;
- $I = [0,1[$, $f(x) = x$: la fonction f est continue sur I mais f n'atteint pas sa borne supérieure ($[0,1[$ est un intervalle, mais ce n'est pas un segment) ;
- $I = [0,1]$ $f(x) = x$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1/2$ si $x \in \mathbb{Q}$. $\sup f = 1$, $\inf f = 0$, mais les bornes ne sont pas atteintes (la fonction f n'est pas continue).

Exercice 10-14

Soient deux fonctions $f,g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continues telles que
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) < g(x)$$
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) + \alpha \leq g(x)$$

> THÉORÈME 10.26 : **L'image continue d'un segment est un segment**
> Soit deux réels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a,b]$. Alors, l'image directe du segment $[a,b]$, $f\big([a,b]\big)$ est également un segment.

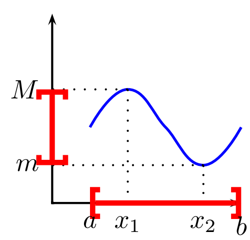

FIG. 10.8 – *Image continue d'un segment*

> DÉFINITION 10.18 : **Fonction uniformément continue**
> Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. On dit qu'elle est *uniformément continue* sur I lorsque
> $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
> Le nombre η est indépendant des réels (x,y) et s'appelle un *module d'uniforme continuité*.

Exercice 10-15

Montrez que si $f : I \mapsto \mathbb{R}$,

$$(f \text{ lipschitzienne sur } I) \Rightarrow (f \text{ uniformément continue sur } I) \Rightarrow (f \text{ continue sur } I)$$

THÉORÈME 10.27 : **Théorème de Heine**
Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Exercice 10-16

On considère une fonction continue $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} l \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
