

Chapitre 13

Espaces vectoriels

13.1 Structure de corps

DÉFINITION 13.1 : Corps

On considère un ensemble K muni de deux lois de composition interne, notées $+$ et \times . On dit que $(K, +, \times)$ est un *corps* si et seulement si :

1. $(K, +, \times)$ est un anneau ;
2. tout élément non-nul de K est inversible pour la loi \times .

Exemple 25. $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps, mais $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'en est pas un car les seuls éléments inversibles sont 1 et -1 .

PROPOSITION 13.1 : Un corps est un anneau intègre

Dans un corps $(\mathbb{K}, +, \times)$, si deux éléments $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ vérifient $x \times y = 0_K$, alors $x = 0_K$ ou $y = 0_K$. En particulier, on peut « simplifier par un élément non nul » :

$$\forall (a, x, y) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0_K, a \times x = a \times y \Rightarrow x = y$$

DÉFINITION 13.2 : Sous-corps

Soit $K' \subset K$ un sous-ensemble d'un corps $(K, +, \times)$. On dit que la partie K' est un *sous-corps* du corps K si et seulement si :

1. K' est un sous-anneau de l'anneau $(K, +, \times)$;
2. l'inverse de tout élément non-nul de K' est dans K' .

DÉFINITION 13.3 : Morphisme de corps

Une application f entre deux corps $(K, +, \times)$ et $(K', +, \times)$ est un morphisme de corps si et seulement si c'est un morphisme d'anneaux.

THÉORÈME 13.2 : Calcul d'une somme géométrique dans un corps

Soit un élément $k \in K$ du corps $(K, +, \times)$. Alors la formule suivante permet de calculer une progression géométrique de raison k :

$$\sum_{i=0}^n k^i = 1 + k + k^2 + \dots + k^n = \begin{cases} (1 - k)^{-1}(1 - k^{n+1}) & \text{si } k \neq 1 \\ (n + 1)1_K & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

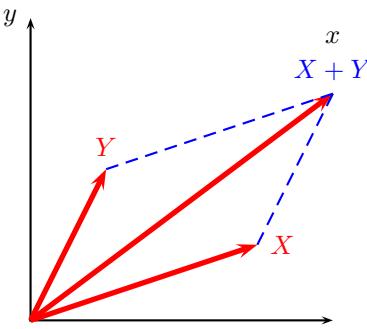


FIG. 13.1 – Addition de vecteurs dans \mathbb{R}^2 .

13.2 Espaces vectoriels

DÉFINITION 13.4 : Espace vectoriel

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif. On appelle espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} tout ensemble E muni d'une loi $+$ et d'une loi de composition *externe*

$$\begin{cases} K \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{cases}$$

vérifiant :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif,
2. $\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall (x, y) \in E^2$:
 - (a) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
 - (b) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
 - (c) $(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
3. $\forall x \in E, 1_K \cdot x = x$

On dit aussi que E est un \mathbb{K} -espace vectoriel. Les éléments de E s'appellent les *vecteurs* et les éléments de K les *scalaires*. L'élément neutre pour $+$, est noté 0_E et s'appelle le *vecteur nul*.

Exemples

- a) Si K est un corps commutatif, on définit une loi externe en posant pour $\lambda \in K$ et $x \in K, \lambda \cdot x = \lambda \times x$. Muni de « $+$ » et « \cdot », K a une structure de K -ev.
- b) Si $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$, on définit l'addition de deux vecteurs: $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) X+Y = (x_1+y_1, x_2+y_2)$ et la multiplication d'un scalaire par un vecteur: Si $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot X = (\lambda x_1, \lambda x_2)$. Muni de ces deux lois, \mathbb{R}^2 a une structure de \mathbb{R} -ev. On peut représenter un vecteur $X = (x_1, x_2)$ de \mathbb{R}^2 par une flèche joignant le point $(0,0)$ au point (x_1, x_2) . L'addition de deux vecteurs s'obtient en traçant un parallélogramme.

PROPOSITION 13.3 : Espace produit

Soit K un corps commutatif et E_1, \dots, E_n des K -ev. On définit sur $E_1 \times \dots \times E_n$ les lois :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n)$$

et alors $(E_1 \times \dots \times E_n, +, \cdot)$ est un K -ev. Le vecteur nul est $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

En particulier, \mathbb{R}^n est un \mathbb{R} -ev et \mathbb{C}^n est un \mathbb{C} -ev.

PROPOSITION 13.4 : Espaces de fonctions

Soit A un ensemble quelconque et E un K -ev. On note $\mathcal{F}(A, E)$ l'ensemble des fonctions de A vers E . On définit alors deux lois sur $\mathcal{F}(A, E)$:

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(A, E), \quad (f + g) : \begin{cases} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{cases}$$

$$\forall f \in \mathcal{F}(A, E), \forall \lambda \in K, \quad \lambda \cdot f : \begin{cases} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot f(x) \end{cases}$$

Alors $(\mathcal{F}(A, E), +, \cdot)$ est un K -ev.

COROLLAIRE 13.5 : Espace de suites

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel, l'ensemble des suites à valeurs dans \mathbb{K} , muni des lois $+$ et \cdot est également un \mathbb{K} -espace vectoriel $(\mathcal{S}(E), +, \cdot)$.

PROPOSITION 13.6 : Règles de calcul dans un ev

pour tout (λ, μ) dans \mathbb{K}^2 , pour tout (x, y) dans E^2 , on a :

$$\begin{aligned}(\lambda - \mu) \cdot x &= \lambda \cdot x - \mu \cdot x \\ 0_K \cdot x &= 0_E \\ \lambda \cdot (x - y) &= \lambda \cdot x - \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot 0_E &= 0_E \\ (-\lambda) \cdot x &= -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x) \\ (\lambda \cdot x) = 0_E &\iff (\lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E)\end{aligned}$$

On écrira désormais λx à la place de $\lambda \cdot x$ lorsque la confusion ne sera plus à craindre.

13.3 Sous-espaces vectoriels

DÉFINITION 13.5 : Sous-espaces vectoriels

Soit $(E, +, \cdot)$ un K -ev et $F \subset E$ une partie de E . On dit que F est un sev de E si et seulement si :

- $0_E \in F$
- $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in K^2, \lambda x + \mu y \in F$ (on dit que F est *stable par combinaisons linéaires*).

PROPOSITION 13.7 : Un sev a une structure d'espace vectoriel

Si F est un sev de E , alors muni des lois restreintes à F , F est un K -ev.

Remarque 129. Si E est un espace vectoriel, alors les parties $\{0_E\}$ et E sont toujours des sev de E .

Exemple 26. Les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 sont : $\{0\}$, \mathbb{R}^2 , toutes les droites passant par l'origine :

$$F = \{\lambda(x_0, y_0) ; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 13-1

Soit l l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0. Montrer que c'est un \mathbb{R} -ev.

Exercice 13-2

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sev de l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

- $F = \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$;
- $F = \{f \in F \mid f(1) = 2f(0)\}$;
- $F = \{f \in F \mid f(0) = f(1) + 1\}$;
- $F = \{f \in F \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1 - x)\}$;
- $F = \{f \in F \mid f \text{ dérivable et } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = a(x)f(x)\} \text{ où } a \in E$.
- $F = \{f \in F \mid f \text{ dérivable et } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = a(x)f^2(x)\} \text{ où } a \in E$.

THÉORÈME 13.8 : L'intersection de sev est un sev

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E . Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sev de E .

Exercice 13-3

Montrer que $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ sont des \mathbb{R} -ev.

DÉFINITION 13.6 : Espace vectoriel engendré par une partie

Soit un K -ev E et une partie $A \subset E$ de E . On appelle *sous-espace engendré* par la partie A , le plus petit sev de E contenant A . On note \mathcal{F}_A l'ensemble des sev de E contenant A , alors :

$$\text{Vect}(A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$$

THÉORÈME 13.9 : Caractérisation de Vect(A)

Si $A \neq \emptyset$, $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires *finies* d'éléments de A :

$$\text{Vect}(A) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n x_n ; n \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, (a_1, \dots, a_n) \in A^n\}$$

Exercice 13-4

Dans \mathbb{R}^3 , déterminer le sev engendré par $A = \{(1,1,1), (1,0,1)\}$

Exercice 13-5

1. Si $A \subset B$, montrer que $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
2. Si F est un sev, montrer que $\text{Vect}(F) = F$.
3. Montrer que $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.

Exercice 13-6

Dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on définit pour $n \in \mathbb{N}$ la suite :

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

(tous les termes de la suite sont nuls sauf le nième qui vaut 1). Déterminer le sev engendré par la partie $A = \{e_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$.

DÉFINITION 13.7 : Somme de sev

Soit E un K -ev et F_1, \dots, F_n des sev de E . On appelle *somme* des sev F_i , l'ensemble

$$F_1 + \dots + F_n = \{x_1 + \dots + x_n ; x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n\}$$

THÉORÈME 13.10 : Caractérisation de Vect($F_1 + \dots + F_n$)

$F_1 + \dots + F_n$ est un sev de E et

$$F_1 + \dots + F_n = \text{Vect}(F_1 \cup \dots \cup F_n)$$

Exercice 13-7

Dans l'espace \mathbb{R}^3 , on considère les parties $F = \{(x, 0, 0) ; x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, x, 0) ; x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que ce sont des sev et déterminer le sous espace $F + G$.

DÉFINITION 13.8 : Somme directe

Soient deux sev F_1, F_2 de l'espace vectoriel E . On dit que la somme $F_1 + F_2$ est *directe* si et seulement si tout vecteur de $F_1 + F_2$ s'écrit de façon *unique* $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. On note alors $F_1 \oplus F_2$ cette somme.

THÉORÈME 13.11 : Caractérisation d'une somme directe

Soient deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E . On a la caractérisation suivante d'une somme directe :

$$F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2 \iff F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$$

DÉFINITION 13.9 : Sous-espaces supplémentaires

On dit que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E si et seulement si :

$$E = F_1 \oplus F_2$$

Remarque 130. Cela signifie que tout vecteur de E s'écrit de façon *unique* sous la forme

$$x = x_1 + x_2 \text{ avec } x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$$

Pour montrer que $E = F_1 \oplus F_2$:

1. Montrons que la somme est directe, c'est à dire $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Soit $x \in F_1 \cap F_2 \dots$ donc $x = 0_E$.
2. Montrons que $E = F_1 + F_2$: soit $x \in E$. Posons $x_1 = \dots$ et $x_2 = \dots$. On a bien $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$ et $x = x_1 + x_2$.

Remarque 131. Ne pas confondre *supplémentaire* avec *complémentaire* : le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel (il ne contient pas le vecteur nul).

Remarque 132. Il existe en général une infinité de supplémentaires d'un sous-espace vectoriel. Ne pas parler du supplémentaire d'un sev.

Exercice 13-8

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sev

$$F = \text{Vect}((1,2, - 1,0),(0,2,0,1)) \text{ et } G = \text{Vect}((2,0,0,1),(1,0,0,1))$$

Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 13-9

Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on considère l'ensemble \mathcal{P} des fonctions paires et l'ensemble \mathcal{I} des fonctions impaires. Montrer que

$$E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$$

13.4 Sous-espaces affines

DÉFINITION 13.10 : Sous-espace affine

On dit qu'une partie \mathcal{F} d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est un *sous-espace affine* de E si il existe un élément a de E et un sous-espace vectoriel F de E tel que

$$\mathcal{F} = \{a + \vec{f} \mid \vec{f} \in F\}$$

On note alors $\mathcal{F} = a + F$. On dit que : le sev F est la *direction* du sous-espace affine \mathcal{F} ;

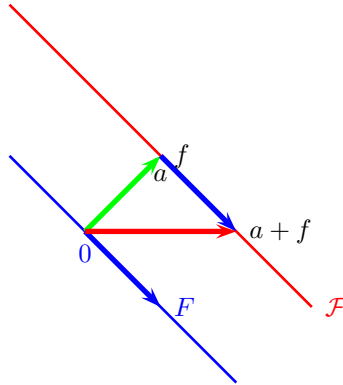


FIG. 13.2 – *Sous-espace affine*

LEMME 13.12 : Indépendance d'un vecteur particulier

Si \mathcal{F} est un sous-espace affine de direction F , alors pour tout élément $a' \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = a' + F$.

DÉFINITION 13.11 : Sous-espaces affines parallèles

On dit que le sous-espace affine \mathcal{G} de direction G est *parallèle* au sous-espace affine \mathcal{F} de direction F lorsque $G \subset F$.

Remarque 133. Dans \mathbb{R}^3 , une droite peut être parallèle à un plan, mais il est incorrect de dire qu'un plan est parallèle à une droite.

THÉORÈME 13.13 : Intersection de sous-espaces affines

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de directions F et G . Si l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ n'est pas vide, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

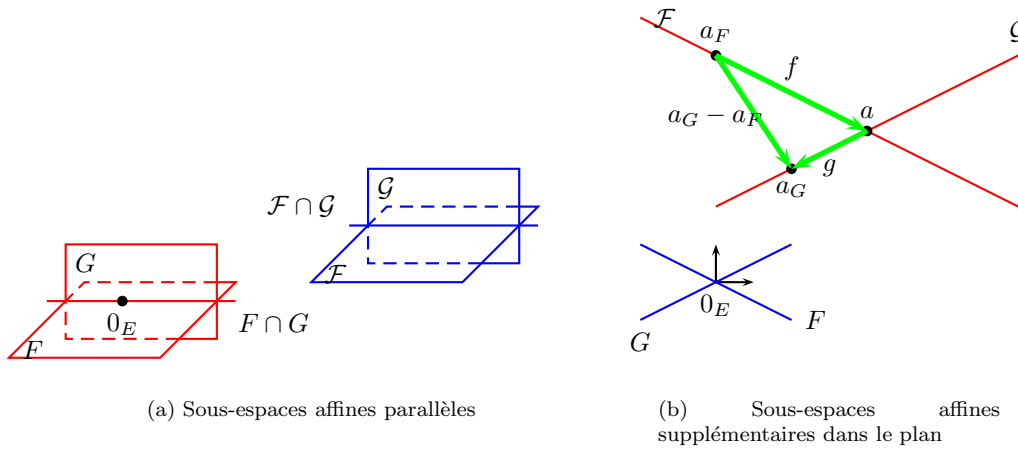


FIG. 13.3 – Intersection de sous-espaces affines

PROPOSITION 13.14 : Intersection de deux sous-espaces affines de directions supplémentaires

Soient deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de directions F et G , avec

$$E = F \oplus G$$

Alors leur intersection est un singleton: $\exists a \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ tel que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{a\}$.

13.5 Systèmes libres, générateurs

DÉFINITION 13.12 : Système de vecteurs

Un système de vecteurs est un n -uplet $S = (x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E .

Remarque 134. On parle également de *famille finie* $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs où I est un ensemble fini.

DÉFINITION 13.13 : Système libre

On dit qu'un système de vecteurs $S = (x_1, \dots, x_n)$ est *libre* si et seulement si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_K$$

Sinon, on dit que le système est *lié*.

Pour montrer qu'un système est libre :

1. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ tels que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E$;
2. ... donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_K$

PROPOSITION 13.15 : Propriétés des systèmes liés

Soit $S = (x_1, \dots, x_n)$ un système de vecteurs de E .

- a. Si l'un des vecteurs est nul, le système est lié;
- b. Si l'un des vecteurs du système apparaît plus d'une fois dans S , le système est lié;
- c. Si le système est lié, l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs du système:

$$\exists i \in [1, n], \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n) \in K^{n-1} \text{ tq } x_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \lambda_j x_j$$

Exercice 13-10

Dans l'espace \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs $x_1 = (1, 0, 2)$, $x_2 = (1, 1, 1)$ et $x_3 = (1, 1, 1)$. Le système (x_1, x_2, x_3) est-il libre?

Exercice 13-11

Dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les deux fonctions définies par $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin x$. Montrer que le système (f, g) est libre.

Les trois fonctions définies par $f(x) = 1$, $g(x) = \cos^2 x$ et $h(x) = \cos 2x$ forment-elles un système libre?

Exercice 13-12

Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les fonctions définies par $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$f_k : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(kx) \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le système $S = (f_1, \dots, f_n)$ est libre. On calculera d'abord pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(qx) dx = \delta_{pq}$$

Exercice 13-13

Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose pour $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^k \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le système $S = (f_1, \dots, f_n)$ est libre.

DÉFINITION 13.14 : Systèmes générateurs

On dit qu'un système de vecteurs $S = (x_1, \dots, x_n)$ est *générateur* d'un espace vectoriel E si et seulement si tout vecteur de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs du système :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \text{ tq } x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

Remarque 135. Cela signifie que $\text{Vect}(S) = E$.

Pour montrer qu'un système est générateur :

1. Soit $x \in E$;
2. posons $\lambda_1 = \dots, \lambda_n = \dots$;
3. on a bien $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.

Exercice 13-14

Dans l'espace \mathbb{R}^2 , montrer que les trois vecteurs $x_1 = (1, 1)$, $x_2 = (2, 3)$ et $x_3 = (2, 2)$ forment un système générateur.

DÉFINITION 13.15 : Base

On dit qu'un système de vecteurs $S = (x_1, \dots, x_n)$ est une *base* de l'espace vectoriel E si et seulement si :

1. le système S est libre ;
2. le système S est générateur.

Remarque 136. Cela signifie que tout vecteur de E s'écrit de façon *unique* comme combinaison linéaire de vecteurs de S .

Pour montrer qu'un système est une base :

1. Montrons que S est libre ...
2. Montrons que S est générateur ...

DÉFINITION 13.16 : Base canonique de K^n

Si $E = K^n$, il existe une base privilégiée, la base canonique $e = (e_1, \dots, e_n)$ où

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

Remarque 137. Ne pas parler de la « base canonique » d'un espace vectoriel quelconque ...

Exercice 13-15

Montrer que dans l'espace \mathbb{R}^3 , le système formé des vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, -1, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$ est une base.

13.6 Applications linéaires

DÉFINITION 13.17 : Application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K et une application $u : E \mapsto F$. On dit que l'application u est *linéaire* si et seulement si :

1. $\forall (x,y) \in E^2, u(x+y) = u(x) + u(y)$;
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

PROPOSITION 13.16 : Caractérisation des applications linéaires

L'application u est linéaire si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\lambda,\mu) \in K^2, u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

Remarque 138. Si l'application u est linéaire et si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une *base* de E , on connaît complètement l'application u si l'on connaît l'image par u des vecteurs de la base.

Exercice 13-16

Déterminer toutes les applications linéaires de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

Exercice 13-17

Déterminer toutes les applications linéaires de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 .

Exercice 13-18

Soit l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(x) \, dx \end{cases}$$

Montrer que ϕ est une application linéaire.

THÉORÈME 13.17 : Image directe, réciproque d'un sev par une application linéaire

Soit $u : E \mapsto F$ une application linéaire, V un sev de E et W un sev de F . Alors :

1. $u^{-1}(W)$ est un sev de E ;
2. $u(V)$ est un sev de F .

DÉFINITION 13.18 : Image, noyau d'une application linéaire

Soit $u : E \mapsto F$ une application linéaire. On appelle :

1. *noyau* de u : $\text{Ker } u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\})$ (sev de E) ;
2. *image* de u : $\text{Im } u = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = u(x)\} = u(E)$ (sev de F).

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \cup & & \cup \\ \text{Ker } u & & \text{Im } u \end{array}$$

THÉORÈME 13.18 : Caractérisation des applications linéaires injectives et surjectives

Soit une application linéaire $u : E \mapsto F$.

1. L'application u est *injective* si et seulement si $\text{Ker } u = \{0_E\}$;
2. L'application u est *surjective* si et seulement si $\text{Im } u = F$.

Exercice 13-19

Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x-y+2z) \end{cases}$$

Est-elle injective? Surjective?

Exercice 13-20

Soit l'espace E des fonctions indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} . On considère l'application :

$$D : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{cases}$$

Montrer que l'application D est linéaire et déterminer son noyau.

THÉORÈME 13.19 : Équation $u(x) = b$

Soit une application linéaire $u : E \mapsto F$. On considère un vecteur $b \in F$, et on note \mathcal{S}_E l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$. Alors

1. si $b \notin \text{Im } u$, $\mathcal{S}_E = \emptyset$;
2. si $b \in \text{Im } u$, il existe une solution particulière $x_0 \in \mathcal{S}_E$. L'ensemble des solutions s'écrit alors

$$\mathcal{S}_E = \{x_0 + k ; k \in \text{Ker } u\}$$

On dit que c'est un sous-espace *affine* de l'espace vectoriel E .

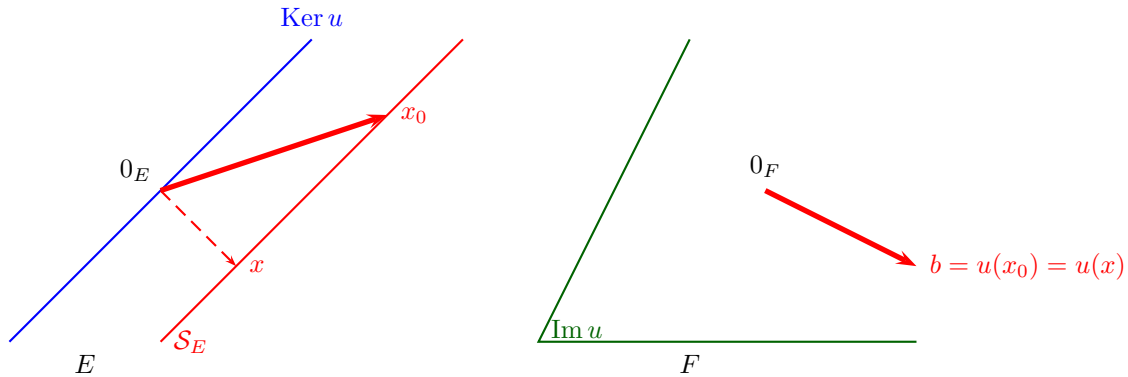


FIG. 13.4 – Équation $u(x) = b$

THÉORÈME 13.20 : Composée d'applications linéaires

Soient E, F, G trois K -ev et $u : E \mapsto F$, $v : F \mapsto G$ deux applications linéaires. Alors $v \circ u : E \mapsto G$ est une application linéaire.

Exercice 13-21

Soient (u, v) les deux applications linéaires définies par :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (0, x) \end{cases} \quad v : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, 0) \end{cases}$$

Déterminer $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice 13-22

Soient $u, v : E \mapsto E$ deux applications linéaires vérifiant $u \circ v = 0$. Comparer $\text{Im } v$ et $\text{Ker } u$.

THÉORÈME 13.21 : Inverse d'une application linéaire bijective

Soit $u : E \mapsto F$ une application linéaire *bijective* et u^{-1} sa bijection réciproque. Alors $u^{-1} : F \mapsto E$ est une application linéaire.

DÉFINITION 13.19 : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme

Soient E, F deux K -ev. On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F .

1. Un *endomorphisme* de E est une application linéaire $u : E \mapsto E$. On note $L(E) = L(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E ;
2. Un *isomorphisme* de E vers F est une application linéaire $u : E \mapsto F$ *bijective* ;
3. Un *automorphisme* de E est un endomorphisme de E *bijectif*. On note $\text{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

THÉORÈME 13.22 : $L(E, F)$ est un espace vectoriel

L'ensemble des applications linéaires d'un espace E vers un espace F , $(L(E, F), +, \cdot)$ est un K -ev.

13.7 Structure d'algèbre

DÉFINITION 13.20 : Structure d'algèbre

Soit un corps commutatif K et un ensemble E muni de deux lois de composition interne $+$, \times et d'une loi de composition externe « \cdot ». On dit que $(E, +, \times, \cdot)$ est une *algèbre* sur K si et seulement si :

1. $(E, +, \cdot)$ est un K -ev ;
2. $(E, +, \times)$ est un anneau ;
3. $\forall \lambda \in K, \forall (x, y) \in E^2, (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y) = \lambda \cdot (x \times y)$.

Remarque 139. Si E est une algèbre, alors $(E, +, \cdot)$ est un e.v. et $(E, +, \times)$ est un anneau. En particulier, on dispose des règles de calcul dans ces deux structures (binôme, factorisation).

Exemples fondamentaux d'algèbres :

1. $(\mathbb{C}, +, \times, \cdot)$ (où \cdot désigne la multiplication d'un complexe par un réel) est une \mathbb{R} -algèbre ;
2. $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \times, \cdot)$ est une \mathbb{R} -algèbre.
3. $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), +, \times, \cdot)$ (suites réelles) est une \mathbb{R} -algèbre ;
4. \mathbb{K}^n est une algèbre si l'on définit la multiplication par

$$(x_1, \dots, x_n) \times (y_1, \dots, y_n) = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$$

DÉFINITION 13.21 : Sous-algèbre

Soit une K -algèbre $(E, +, \times, \cdot)$ et une partie $A \subset E$ de cette algèbre. On dit que A est une sous-algèbre de E lorsque :

1. $0_E \in A, 1_E \in A$;
2. A est stable par CL: $\forall (x, y) \in A^2, \forall (\lambda, \mu) \in K^2, \lambda x + \mu y \in A$;
3. A est stable pour la loi \times : $\forall (x, y) \in A^2, x \times y \in A$.

Alors munie des lois restreintes, A est une algèbre.

DÉFINITION 13.22 : Morphismes d'algèbres

Soit $f : E \mapsto E'$ une application entre deux algèbres. On dit que f est un morphisme d'algèbres si et seulement si :

1. f est une application linéaire: $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in K^2, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$;
2. $\forall (x, y) \in E^2, f(x \times y) = f(x) \times f(y)$;
3. $f(1_E) = 1_{E'}$.

Remarque 140. En d'autres termes, un morphisme d'algèbres est un morphisme d'anneau et une application linéaire.

Exercice 13-23

Montrer que $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une algèbre.

Exercice 13-24

Montrer que $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ défini par $f(z) = \bar{z}$ est un morphisme d'algèbres.

DÉFINITION 13.23 : Application identité

Soit E un K -ev on définit l'*identité* de E par :

$$\text{id}_E : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$$

Soit $\alpha \in K$. On appelle *homothétie vectorielle* de rapport α l'application

$$h_\alpha = \alpha \text{id}_E : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \alpha \cdot x \end{cases}$$

C'est un endomorphisme de E .

THÉORÈME 13.23 : Algèbre $L(E)$

Soit E un K -ev. $(L(E), +, \circ, \cdot)$ est une K -algèbre.

THÉORÈME 13.24 : Groupe linéaire

$(\text{GL}(E), \circ)$ est un groupe (non-commutatif) d'élément neutre id_E . C'est le *groupe linéaire*.

Remarque 141. En général, si $(u, v) \in \text{GL}(E)^2$, on n'a pas $(u + v) \in \text{GL}(E)$. Si $u \in \text{GL}(E)$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda.u \in \text{GL}(E)$ et $(\lambda.u)^{-1} = \frac{1}{\lambda}.u^{-1}$.

Remarque 142. Puisque l'algèbre $(L(E), +, \circ)$ est un anneau (non-commutatif), on a les formules de calcul suivantes: Si u et v sont deux endomorphismes tels que $u \circ v = v \circ u$, on dispose des formules suivantes:

1. **Binôme:** $(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$;
2. **Factorisation:** $u^n - v^n = (u - v) \circ (u^{n-1} + u^{n-2} \circ v + \dots + u \circ v^{n-2} + v^{n-1})$;
3. **Cas particulier de factorisation:** $\text{id} - u^n = (\text{id} - u) \circ (\text{id} + u + u^2 + \dots + u^{n-1})$.

Exercice 13-25

Soit un \mathbb{K} -ev E et deux endomorphismes $u, v \in L(E)$.

- a) Développer $(u + v)^2$;
- b) Développer $(\text{id} - u) \circ (\text{id} + u)$;
- c) Si $u^2 = 0$, montrer que $(\text{id} - u)$ est bijective.

Exercice 13-26

On considère les deux endomorphismes de $E = \mathbb{R}^2$ suivants:

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, 0) \end{cases} \quad \text{et} \quad v : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (0, y) \end{cases}$$

Calculer $u \circ v$, $v \circ u$, u^2 et v^2 . Conclusion? Montrer que l'endomorphisme $(\text{id} - u)$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 13-27

Soit un \mathbb{R} -ev E et un endomorphisme $u \in L(E)$ vérifiant:

$$u^3 + u^2 + 2 \text{id}_E = 0$$

Montrer que $u \in \text{GL}(E)$ et déterminer son inverse u^{-1} . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver une condition suffisante sur le scalaire λ pour que l'endomorphisme $u + \lambda \text{id}$ soit inversible.

Exercice 13-28

Soit un \mathbb{K} -ev E et un endomorphisme $k \in \text{GL}(E)$. On considère l'application

$$\phi_k : \begin{cases} L(E) & \longrightarrow & L(E) \\ u & \longmapsto & k \circ u \end{cases}$$

Montrer que $\phi_k \in \text{GL}(L(E))$, puis que l'application

$$\psi : \begin{cases} \text{GL}(E) & \longrightarrow & \text{GL}(L(E)) \\ k & \longmapsto & \phi_k \end{cases}$$

est un morphisme de groupes injectif.

Exercice 13-29

Soit un \mathbb{R} -ev E et un endomorphisme $u \in L(E)$. Montrer que:

- a) $\text{Im } u = \text{Im } u^2 \iff E = \text{Ker } u + \text{Im } u$
- b) $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2 \iff \text{Ker } u \cap \text{Im } u = \{0\}$.

Exercice 13-30

Soit un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que le système $S = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit libre.

13.8 Projecteurs

DÉFINITION 13.24 : Projecteurs

Soit un endomorphisme $p \in L(E)$. On dit que p est un *projecteur* si et seulement si il vérifie l'identité

$$p \circ p = p$$

THÉORÈME 13.25 : Décomposition associée à un projecteur

Soit un projecteur p d'un espace vectoriel E . Alors

1. on a la caractérisation suivante de $\text{Im } p$:

$$\text{Im}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \text{Ker}(\text{id}_E - p)$$

2. $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et la décomposition d'un vecteur $x \in E$ s'écrit

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im } p} + \underbrace{[x - p(x)]}_{\in \text{Ker } p}$$

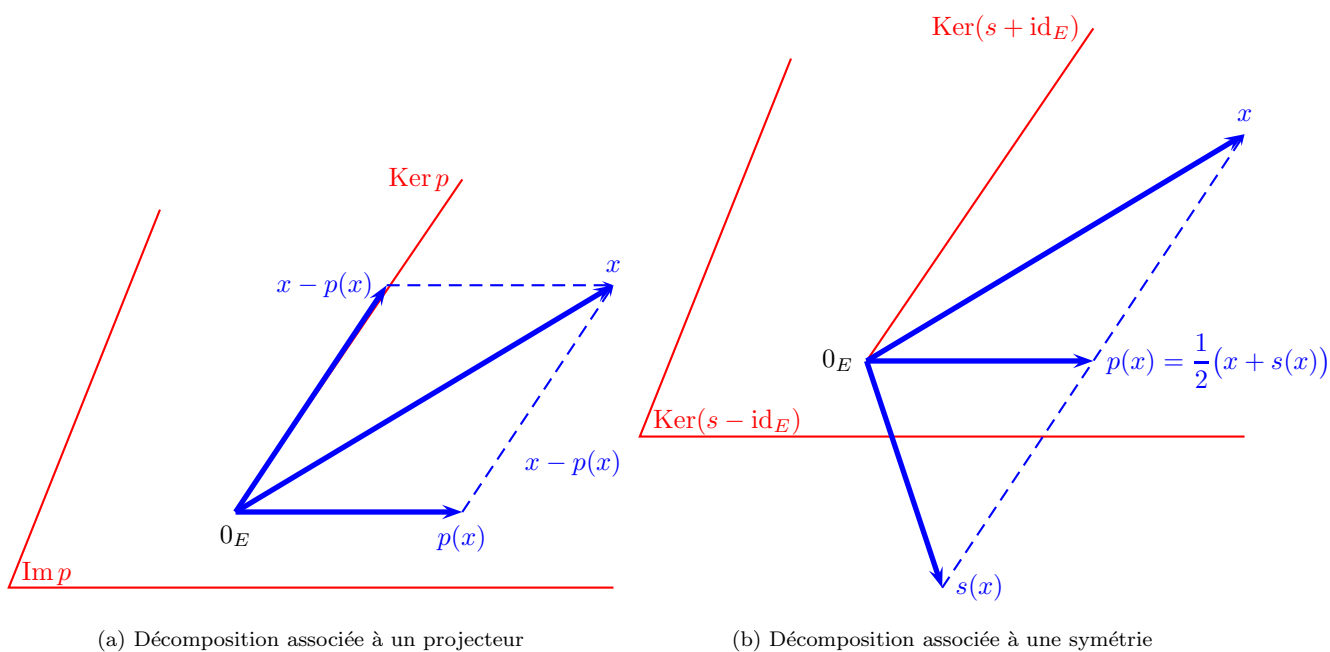


FIG. 13.5 – Projecteur, symétrie

THÉORÈME 13.26 : Projecteur associé à deux sev supplémentaires

Soient F et G deux sev de E supplémentaires: $E = F \oplus G$. Alors il existe un unique projecteur p vérifiant :

$$F = \text{Im } p \quad G = \text{Ker } p$$

On dit que p est le projecteur sur le sous-espace F parallèlement au sous-espace G .

Exercice 13-31

Dans l'espace \mathbb{R}^3 , on considère les sous-espaces $E_1 = \text{Vect}(1,1,1)$ et $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Déterminer l'expression analytique du projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 .

Exercice 13-32

Soit un projecteur p d'un espace vectoriel E . Montrer que l'endomorphisme $(\text{id} - p)$ est aussi un projecteur de E et que l'on a $\text{Ker}(\text{id} - p) = \text{Im } p$, $\text{Im}(\text{id} - p) = \text{Ker } p$.

Exercice 13-33

Soit un projecteur p d'un espace vectoriel E et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit l'endomorphisme $u = p + \lambda \text{id}_E$. Exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme u^n à l'aide de p et de id_E .

Exercice 13-34

Soient deux projecteurs p et q d'un espace vectoriel E . Montrer que l'endomorphisme $(p + q)$ est un projecteur de E si et seulement si l'on a $p \circ q = q \circ p = 0$. Si c'est le cas, montrer qu'alors $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$ et que $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

DÉFINITION 13.25 : Symétries

Soit un endomorphisme $s \in L(E)$ de E . On dit que cet endomorphisme est une *symétrie vectorielle* si et seulement s'il vérifie :

$$s \circ s = \text{id}_E$$

THÉORÈME 13.27 : Décomposition associée à une symétrie

On suppose que le corps \mathbb{K} est \mathbb{Q} , \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soit une symétrie vectorielle s . Alors

1. $E = E_1 \oplus E_2$ où $E_1 = \text{Ker}(s - \text{id})$ (vecteurs invariants) et $E_2 = \text{Ker}(s + \text{id})$ (vecteurs transformés en leur opposé);
2. si p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2 , on a $\text{id} + s = 2p$.

Exercice 13-35

Dans l'espace \mathbb{R}^3 , déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport au sous-espace E_1 parallèlement au sous-espace E_2 où :

$$E_1 = \text{Vect}((1,0,0), (1,1,1)) \text{ et } E_2 = \text{Vect}(1,2,0)$$

Exercice 13-36

Soit un \mathbb{R} -ev E et un endomorphisme $u \in L(E)$. Soient deux réels distincts $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$(u - a \text{id}) \circ (u - b \text{id}) = 0$$

- a) Montrer que $E = \text{Ker}(u - a \text{id}) \oplus \text{Ker}(u - b \text{id})$.
- b) Déterminer la restriction de u à $\text{Ker}(u - a \text{id})$ et à $\text{Ker}(u - b \text{id})$.

Exercice 13-37

On considère un projecteur p d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E et un réel $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Soit un vecteur $b \in E$. Montrer que l'équation vectorielle

$$(E) \quad p(x) + \lambda x = b$$

possède une unique solution $x \in E$.

13.9 Formes linéaires

DÉFINITION 13.26 : Formes linéaires, dual

Soit un K -ev E . On appelle *forme linéaire* sur E , une application linéaire $\phi : E \rightarrow K$. On note $E^* = L(E, K)$ l'ensemble des formes linéaires sur E . E^* s'appelle l'espace *dual* de l'espace E .

DÉFINITION 13.27 : Hyperplan

On appelle *hyperplan* de E , le noyau d'une forme linéaire non-nulle :

$$H = \text{Ker } \phi$$

Exercice 13-38

Déterminer toutes les formes linéaires de l'espace \mathbb{R}^3 . Quels-sont les hyperplans de \mathbb{R}^3 ?

Exercice 13-39

Soit l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'application

$$\delta : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{cases}$$

Vérifier que δ est une forme linéaire sur E et déterminer un supplémentaire de $H = \text{Ker } \delta$.

THÉORÈME 13.28 : Caractérisation des hyperplans

Soit H un sev d'un K -ev E tel que $H \neq E$. Alors H est un hyperplan si et seulement s'il existe un vecteur $a \in E$ tel que H admette la droite vectorielle $\text{Vect}(a)$ comme supplémentaire :

$$(H \text{ est un hyperplan}) \iff (\forall a \in E \setminus H, \quad E = H \oplus \text{Vect}(a))$$

Exercice 13-40

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z = t\}$. Déterminer un supplémentaire de F .

Exercice 13-41

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $H = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de H dans E .

THÉORÈME 13.29 : Deux formes linéaires sont proportionnelles si et seulement si elles ont même noyau

Soient ϕ et ψ deux formes linéaires non-nulles sur E . Alors le système (ϕ, ψ) est lié dans E^* si et seulement si $\text{Ker } \phi = \text{Ker } \psi$.