

# Chapitre 16

## Espaces vectoriels en dimension finie

### 16.1 Définitions

**DÉFINITION 16.1 : ev de dimension finie**

On dit qu'un espace vectoriel  $E$  est de *dimension finie* si et seulement si il existe un système générateur  $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n)$  de  $E$  de cardinal fini. Par convention, on dit que  $E = \{0\}$  est un espace de dimension finie.

**LEMME 16.1 : Augmentation d'un système libre**

Soit un système de vecteurs  $\mathcal{L} = (l_1; \dots; l_n)$  libre d'un espace vectoriel  $E$  et un vecteur  $x \in E$ . Si  $x \notin \text{Vect}(\mathcal{L})$ , alors le système  $\mathcal{L}' = (l_1; \dots; l_n; x)$  est encore libre.

**LEMME 16.2 : Diminution d'un système générateur**

Soit un système formé de  $n+1$  vecteurs de l'espace  $E : S = (x_1; \dots; x_n; x_{n+1}) \in E^{n+1}$ . Si le vecteur  $x_{n+1}$  est combinaison linéaire des autres vecteurs :  $x_{n+1} \in \text{Vect}(x_1; \dots; x_n)$ , alors on peut retirer le vecteur  $x_{n+1}$  sans modifier le sous-espace engendré par  $S$  :

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, x) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

**THÉORÈME 16.3 : Théorème de la base incomplète**

Si  $\mathcal{L} = (l_1, \dots, l_p)$  est un système libre de  $E$  et  $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_q)$  est un système générateur de l'espace  $E$ , alors il existe une base de  $E$  de la forme

$$\mathcal{B} = (l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, \dots, l_n)$$

où  $l_{p+1}, \dots, l_n \in \mathcal{G}$ . En d'autres termes, on peut compléter un système libre en une base en ajoutant des vecteurs puisés dans un système générateur.

*Remarque 180.* On dispose d'un algorithme pour construire une base à partir d'un système libre.

**COROLLAIRE 16.4 : Existence de base**

Tout espace vectoriel de dimension finie *non-nul* possède une base.

**COROLLAIRE 16.5 : Complétion d'un système libre en une base**

Si  $E$  est un ev de dimension finie  $n$  et  $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_p)$  un système libre, alors on peut compléter ce système en une base  $e = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ .

### 16.2 Dimension d'un espace vectoriel

**THÉORÈME 16.6 : Lemme de Steinitz**

Soit  $S = (x_1, \dots, x_n)$  un système de vecteurs de  $E$  et  $A = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$  un autre système. Si

$$\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, a_i \in \text{Vect}(S)$$

alors le système  $A$  est lié.

**THÉORÈME 16.7 : Le cardinal d'un système libre est plus petit que celui d'un système générateur**

Si  $\mathcal{L}$  est un système libre et  $\mathcal{G}$  un système générateur de  $E$ , on a

$$|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{G}|$$

*Remarque 181.* D'après ce théorème, pour montrer qu'un espace vectoriel n'est pas de dimension finie, il suffit d'exhiber une famille  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de vecteurs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (x_1, \dots, x_n) \text{ est libre}$$

**Exercice 16-1**

Montrer que  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  sont de dimension infinie.

**THÉORÈME 16.8 : Cardinal d'une base**

Si  $E$  est de dimension finie, toutes les bases de  $E$  ont même cardinal.

**DÉFINITION 16.2 : dimension d'un ev**

Si  $E = \{0\}$ , on dit que  $E$  est de dimension 0 :  $\dim E = 0$ .

Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie non-nul, on appelle *dimension* de  $E$ , le cardinal commun des bases de  $E$  et l'on note  $n = \dim E$ .

*Remarque 182.*  $K^n$  est un  $K$ -ev de dimension  $n$ .

*Remarque 183.* La dimension dépend du corps de base. Par exemple,  $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{C}$ -ev de dimension 1, mais un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2.

**THÉORÈME 16.9 : Caractérisation des bases**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $S = (x_1, \dots, x_p)$  un système de vecteurs de  $E$ .

1.  $S$  est une base de  $E$  ssi  $S$  est libre et  $p = n$ ;
2.  $S$  est une base de  $E$  ssi  $S$  est générateur et  $p = n$ .

*Remarque 184.* On vérifie en général que le système  $S$  est libre et  $|S| = \dim E$ , ce qui évite de montrer que  $S$  est générateur (fastidieux en général).

**Exercice 16-2**

Soit  $E = \mathbb{R}^n$  et  $S = (e_1, \dots, e_n)$  avec  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (1, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $e_n = (1, \dots, 1)$ . Montrer que  $S$  est une base de  $E$ .

**Exercice 16-3**

Dans l'espace  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , si  $S = (P_0, \dots, P_n)$  est un système de polynômes tels que  $\forall i \in [0, n]$ ,  $\deg P_i = i$ . Montrer que  $S$  est une base de  $E$ .

**Exercice 16-4**

Soit  $E$  un  $K$ -ev de dimension finie  $n$  et un endomorphisme  $u \in L(E)$  nilpotent d'indice  $n$  : ( $u^n = 0$  et  $u^{n-1} \neq 0$ ). Montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que  $S = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$  soit une base de  $E$ .

## 16.3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

**THÉORÈME 16.10 : dimension d'un sev**

Soit  $E$  un ev de dimension finie  $n$  et  $F$  un sev de  $E$ .

1.  $F$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$ ;
2.  $(\dim F = \dim E) \iff (F = E)$ .

*Remarque 185.* On utilise souvent ce résultat pour montrer que deux sev  $F$  et  $G$  sont égaux :

$$F \subset G \text{ et } \dim F = \dim G \Rightarrow F = G$$

**THÉORÈME 16.11 : Base adaptée à une somme directe**

Si  $E$  est un ev de dimension finie et  $E_1, E_2$  deux sev supplémentaires :  $E = E_1 \oplus E_2$ , Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $E_1$  et  $(f_1, \dots, f_k)$  une base de  $E_2$ , alors  $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_k)$  est une base de  $E$ .

**THÉORÈME 16.12 : dimension d'une somme directe**

$$E = E_1 \oplus E_2 \Rightarrow \dim E = \dim E_1 + \dim E_2$$

**THÉORÈME 16.13 : Existence de supplémentaires en dimension finie**

Si  $E$  est un ev de dimension finie, et  $F$  un sev de  $E$ , alors il existe des supplémentaires de  $F$  dans  $E$ .

*Remarque 186.* Ne jamais parler *du* supplémentaire de  $F$ , car en général il en existe une infinité. Penser à  $F$  qui est une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^2$  (voir figure 16.3).

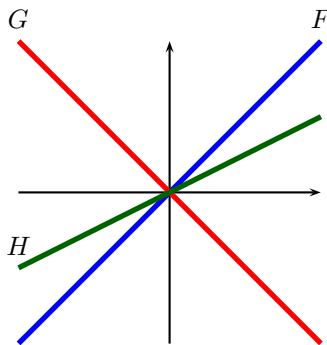


FIG. 16.1 – Deux supplémentaires d'un s.e.v

**THÉORÈME 16.14 : dimension d'une somme**

Soit  $E$  de dimension finie et  $F, G$  deux sev de  $E$ . Alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

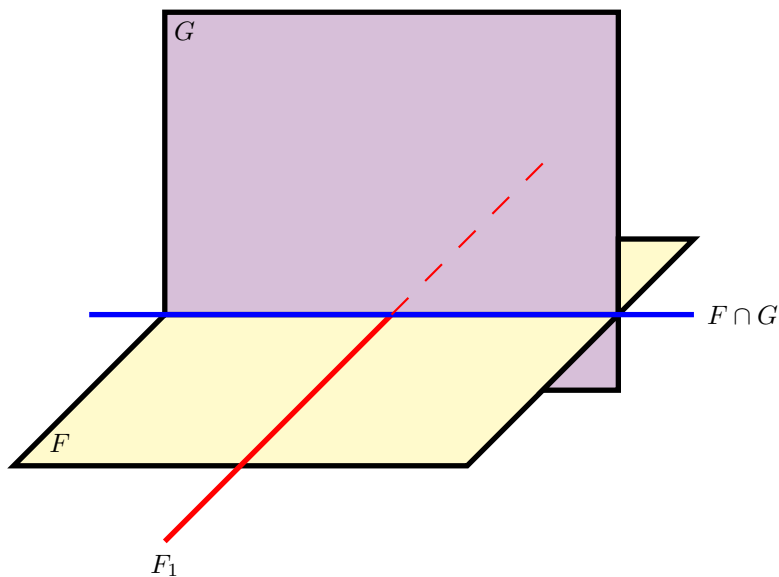


FIG. 16.2 – Dimension de  $F + G$  :  $F = F_1 \oplus (F \cap G)$  et  $F + G = G \oplus F_1$

**THÉORÈME 16.15 : Caractérisation des supplémentaires**

Soit  $E$  un  $ev$  de dimension finie  $n$  et  $F, G$  deux  $sev$  de  $E$ . Alors

$$(E = F \oplus G) \iff (F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim F + \dim G = n)$$

$$(E = F \oplus G) \iff (F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = n)$$

*Remarque 187.* En pratique, on utilise souvent la première caractérisation, car il est simple de montrer que  $F \cap G = \{0\}$ .

**Exercice 16-5**

Soit  $E = \mathbb{R}^4$ ,  $F = \text{Vect}((1,2,1,1), (0,1,1,1))$  et  $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x = y\}$ . Montrer que  $F \oplus G = E$ .

**Exercice 16-6**

Soit  $E = \mathbb{R}^4$  et  $F = \text{Vect}((1,0,1,0), (1,2,0,0))$ . Trouver un supplémentaire de  $F$  dans  $E$

**Exercice 16-7**

Soit  $E = \mathbb{R}^4$  et

$$F = \text{Vect}((1,1,\lambda,3), (0,1,1,2)) \quad G = \{(x,y,z,t) \in E \mid x - y + z = 0, x + 2y - t = 0\}$$

A quelle condition sur  $\lambda \in \mathbb{R}$  a-t-on  $F = G$ ?

**Exercice 16-8**

Soit  $E$  un  $K$ - $ev$  de dimension finie  $n$  et  $H$  un hyperplan de  $E$ . Déterminer  $\dim H$ .

**THÉORÈME 16.16 : Dimension d'un espace produit**

Si  $E$  et  $F$  sont deux  $ev$  de dimension finie,

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$$

## 16.4 Applications linéaires en dimension finie — formule du rang

**THÉORÈME 16.17 : Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base**

Soit  $E$  un  $ev$  de dimension finie  $n$ ,  $F$  un  $ev$  quelconque,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $f = (f_1, \dots, f_n)$  un système de  $n$  vecteurs de  $F$ .

1. Il existe une unique application linéaire  $u \in L(E, F)$  telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u(e_i) = f_i$$

2.  $(u \text{ injective}) \iff (f \text{ libre})$  ;
3.  $(u \text{ surjective}) \iff (f \text{ générateur})$ .

*Remarque 188.* Le théorème précédent est important: il dit que pour déterminer une application linéaire, il suffit de donner l'image d'une base par cette application.

**THÉORÈME 16.18 : Dimension de  $L(E, F)$** 

Si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, alors  $L(E, F)$  est également de dimension finie et

$$\dim L(E, F) = \dim E \times \dim F$$

*Remarque 189.* En particulier, si l'espace  $E$  est de dimension finie, son dual  $E^*$  est également de dimension finie et  $\dim E^* = \dim E$ .

**THÉORÈME 16.19 : Espaces isomorphes**

Soient deux  $ev$   $E$  et  $F$  de dimension finie. On dit qu'ils sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme  $u : E \rightarrow F$ . On a la caractérisation

$$(E \text{ et } F \text{ isomorphes}) \iff (\dim E = \dim F)$$

**DÉFINITION 16.3 : Rang d'un système de vecteurs, d'une application linéaire**

Soit un espace vectoriel  $E$  de dimension finie et un système de vecteurs  $S = (x_1, \dots, x_n)$ . On appelle *rang* du système  $S$ , la dimension du sous-espace vectoriel engendré par  $S$  :

$$\text{rg}(S) = \dim \text{Vect}(S)$$

Si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie et  $u \in L(E, F)$ , on appelle *rang* de  $u$ , la dimension du sous-espace vectoriel  $\text{Im } u$  :

$$\text{rg}(u) = \dim(\text{Im } u)$$

**THÉORÈME 16.20 : Le rang d'une application linéaire est le rang du système de vecteurs image d'une base par l'application**

Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  et  $u \in L(E, F)$ ,

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$$

**THÉORÈME 16.21 : Formule du rang**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $F$  un espace vectoriel quelconque et une application linéaire  $u \in L(E, F)$ . On a la *formule du rang* :

$$\boxed{\dim E = \dim \text{Ker}(u) + \text{rg } u}$$

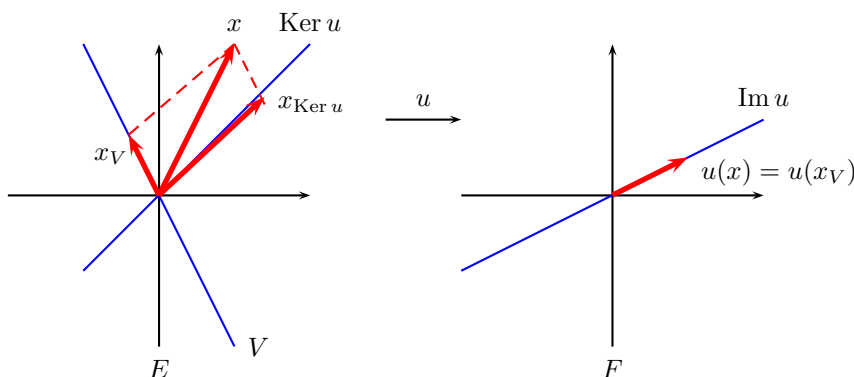


FIG. 16.3 – Formule du rang :  $E = \text{Ker } u \oplus V$  et  $V \approx \text{Im } u$

*Remarque 190.* On montre dans la démonstration de la formule du rang, que  $\text{Im } u$  est isomorphe à tout supplémentaire de  $\text{Ker } u$ , mais en général, si  $u$  est un endomorphisme,  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$  ne sont pas supplémentaires. Trouver un exemple d'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  pour lequel  $\text{Im } u = \text{Ker } u$  !

**THÉORÈME 16.22 : Isomorphismes en dimension finie**

Soient deux espaces vectoriels  $(E, n)$  et  $(F, n)$  sur le corps  $\mathbb{K}$  de même dimension finie  $n$ . Soit une application linéaire  $u \in L(E, F)$ . Alors

$$(u \text{ injective} ) \iff (u \text{ surjective} ) \iff (u \text{ bijective} )$$

*Remarque 191.* Ce théorème est bien entendu faux si les deux espaces n'ont pas la même dimension.

## 16.5 Endomorphismes en dimension finie

**THÉORÈME 16.23 : Caractérisation des automorphismes**

Soit un espace vectoriel  $E$  de dimension finie et un endomorphisme  $u \in L(E)$ . On a :

$$(u \text{ injective} ) \iff (u \text{ bijective} )$$

$$(u \text{ surjective} ) \iff (u \text{ bijective} )$$

*Remarque 192.* Ce théorème est très utile en pratique. On montre qu'un endomorphisme est injectif (le plus facile) et alors en dimension finie il est automatiquement bijectif.

**Exercice 16-9**

Soit  $E$  un  $K$ -ev de dimension finie  $n$ ,  $F$  un  $K$ -ev de dimension finie  $p$  et  $u \in L(E, F)$ . Montrer que  $\text{rg}(u) \leq \min(n, p)$ .

**Exercice 16-10**

Soit  $E$  un  $K$ -ev de dimension finie  $n$ ,  $F$  un  $K$ -ev de dimension finie  $p$  et  $u, v \in L(E, F)$ . Montrer que

$$|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$$

**Exercice 16-11**

Soit  $E$  un  $K$ -ev de dimension finie  $n$ , et  $u \in L(E)$ . Montrer que

$$(\text{Ker } u = \text{Im } u) \iff (u^2 = 0 \text{ et } n = 2 \text{rg}(u))$$

**Exercice 16-12**

On considère  $(n + 1)$  réels distincts  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  et l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{cases}$$

a) Montrer que  $\phi$  est un isomorphisme.

b) En déduire que si  $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\forall i \in [0, n], P(x_i) = y_i$  (polynôme interpolateur de Lagrange). c) Soient deux réels distincts  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et quatre réels  $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) \in \mathbb{R}^4$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  vérifiant

$$P(a) = \alpha, P'(a) = \beta, P(b) = \delta, P'(b) = \gamma$$

**THÉORÈME 16.24 : Inverses à gauche et à droite**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme  $u \in L(E)$ . On dit que

1.  $u$  est inversible à gauche ssi il existe  $v \in L(E)$  tel que  $v \circ u = \text{id}$  ;
2.  $u$  est inversible à droite ssi il existe  $w \in L(E)$  tel que  $u \circ w = \text{id}$  ;
3.  $u$  est inversible ssi il existe  $u^{-1} \in L(E)$  tel que  $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \text{id}$ .

On a la caractérisation :

$$(u \text{ inversible à gauche}) \iff (u \text{ inversible à droite}) \iff (u \text{ inversible})$$

*Remarque 193.* Ce résultat est faux en dimension infinie comme le montre le contre-exemple suivant. Soit  $\mathcal{S}$  l'espace des suites réelles. On définit deux endomorphismes (le « shift » à gauche et à droite) :

$$s_g : (a_0, a_1, \dots) \mapsto (a_1, a_2, \dots)$$

$$s_d : (a_0, a_1, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, \dots)$$

Etudier l'injectivité, la surjectivité de  $s_g, s_d$ . Calculer  $s_g \circ s_d$  et  $s_d \circ s_g$ .

**Exercice 16-13**

Soit  $E$  un  $K$ -ev de dimension finie  $n$  et  $u, v \in L(E, F)$ . Montrer que

$$u^2 \circ v - u \circ v \circ u + \text{id} = 0 \Rightarrow u \in GL(E)$$

**Exercice 16-14**

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $Q \in E$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in E$  vérifiant  $P' + P = Q$ .