# Chapitre 16

# Espaces vectoriels en dimension finie

## 16.1 Définitions

Définition 16.1 : **ev de dimension finie**
On dit qu'un espace vectoriel $E$ est de *dimension finie* si et seulement si il existe un système générateur $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n)$ de $E$ de cardinal fini. Par convention, on dit que $E = \{0\}$ est un espace de dimension finie.

Lemme 16.1 : **Augmentation d'un système libre**
Soit un système de vecteurs $\mathcal{L} = (l_1; \dots; l_n)$ *libre* d'un espace vectoriel $E$ et un vecteur $x \in E$. Si $x \notin \text{Vect}(\mathcal{L})$, alors le système $\mathcal{L}' = (l_1; \dots; l_n; x)$ est encore libre.

Lemme 16.2 : **Diminution d'un système générateur**
Soit un système formé de $n+1$ vecteurs de l'espace $E$ : $S = (x_1; \dots; x_n; x_{n+1}) \in E^{n+1}$. Si le vecteur $x_{n+1}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs : $x_{n+1} \in \text{Vect}(x_1; \dots; x_n)$, alors on peut retirer le vecteur $x_{n+1}$ sans modifier le sous-espace engendré par $S$ :

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, x) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

Théorème 16.3 : **Théorème de la base incomplète**
Si $\mathcal{L} = (l_1, \dots, l_p)$ est un système *libre* de $E$ et $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_q)$ est un système *générateur* de l'espace $E$, alors il existe une base de $E$ de la forme

$$\mathcal{B} = (l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, \dots, l_n)$$

où $l_{p+1}, \dots, l_n \in \mathcal{G}$. En d'autres termes, on peut compléter un système libre en une base en ajoutant des vecteurs puisés dans un système générateur.

*Remarque* 180. On dispose d'un algorithme pour construire une base à partir d'un système libre.

Corollaire 16.4 : **Existence de base**
Tout espace vectoriel de dimension finie *non-nul* possède une base.

Corollaire 16.5 : **Complétion d'un système libre en une base**
Si $E$ est un ev de dimension finie $n$ et $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_p)$ un système libre, alors on peut compléter ce système en une base $e = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$.

## 16.2 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 16.6 : **Lemme de Steinitz**
Soit $S = (x_1, \dots, x_n)$ un système de vecteurs de $E$ et $A = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ un autre système. Si

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!],\ a_i \in \text{Vect}(S)$$

alors le système $A$ est lié.

**Théorème 16.7 : Le cardinal d'un système libre est plus petit que celui d'un système générateur**
Si $\mathcal{L}$ est un système libre et $\mathcal{G}$ un système générateur de $E$, on a

$$|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{G}|$$

*Remarque* 181. D'après ce théorème, pour montrer qu'un espace vectoriel n'est pas de dimension finie, il suffit d'exhiber une famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de vecteurs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (x_1,\dots,x_n) \text{ est libre}$$

*Exercice 16-1*
Montrer que $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont de dimension infinie.

---

**Théorème 16.8 : Cardinal d'une base**
Si $E$ est de dimension finie, toutes les bases de $E$ ont même cardinal.

**Définition 16.2 : dimension d'un ev**
Si $E = \{0\}$, on dit que $E$ est de dimension $0$ : $\dim E = 0$.
Si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie non-nul, on appelle *dimension* de $E$, le cardinal commun des bases de $E$ et l'on note $n = \dim E$.

*Remarque* 182. $K^n$ est un K-ev de dimension $n$.

*Remarque* 183. La dimension dépend du corps de base. Par exemple, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 1, mais un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

**Théorème 16.9 : Caractérisation des bases**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ et $S = (x_1,\dots,x_p)$ un système de vecteurs de $E$.

1. $S$ est une base de $E$ ssi $S$ est *libre* et $p = n$ ;
2. $S$ est une base de $E$ ssi $S$ est *générateur* et $p = n$.

*Remarque* 184. On vérifie en général que le système $S$ est libre et $|S| = \dim E$, ce qui évite de montrer que $S$ est générateur (fastidieux en général).

*Exercice 16-2*
Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $S = (e_1,\dots,e_n)$ avec $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (1,1,0\dots,0)$,..., $e_n = (1,\dots,1)$. Montrer que $S$ est une base de $E$.

---

*Exercice 16-3*
Dans l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, si $S = (P_0,\dots,P_n)$ est un système de polynômes tels que $\forall i \in [0,n]$, $\deg P_i = i$. Montrer que $S$ est une base de $E$.

---

*Exercice 16-4*
Soit $E$ un K-ev de dimension finie $n$ et un endomorphisme $u \in L(E)$ nilpotent d'indice $n$ : ($u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $S = (x,u(x),\dots,u^{n-1}(x))$ soit une base de $E$.

---

## 16.3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

**Théorème 16.10 : dimension d'un sev**
Soit $E$ un ev de dimension finie $n$ et $F$ un sev de $E$.

1. $F$ est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$ ;
2. $(\dim F = \dim E) \Longleftrightarrow (F = E)$.

*Remarque* 185. On utilise souvent ce résultat pour montrer que deux sev $F$ et $G$ sont égaux :

$$\boxed{F \subset G \text{ et } \dim F = \dim G \Rightarrow F = G}$$

**Théorème 16.11 : Base adaptée à une somme directe**
Si $E$ est un ev de dimension finie et $E_1,E_2$ deux sev supplémentaires : $E = E_1 \oplus E_2$, Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de $E_1$ et $(f_1,\dots,f_k)$ une base de $E_2$, alors $(e_1,\dots,e_p,f_1,\dots,f_k)$ est une base de $E$.

**Théorème 16.12 : dimension d'une somme directe**

$$E = E_1 \oplus E_2 \Rightarrow \dim E = \dim E_1 + \dim E_2$$

**Théorème 16.13 : Existence de supplémentaires en dimension finie**
Si $E$ est un ev de dimension *finie*, et $F$ un sev de $E$, alors il existe des supplémentaires de $F$ dans $E$.

*Remarque* 186. Ne jamais parler *du* supplémentaire de $F$, car en général il en existe une infinité. Penser à $F$ qui est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ (voir figure 16.3).

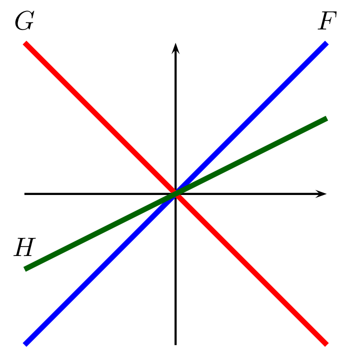


Fig. 16.1 – *Deux supplémentaires d'un s.e.v*

**Théorème 16.14 : dimension d'une somme**
Soit $E$ de dimension finie et $F$,$G$ deux sev de $E$. Alors :

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$$

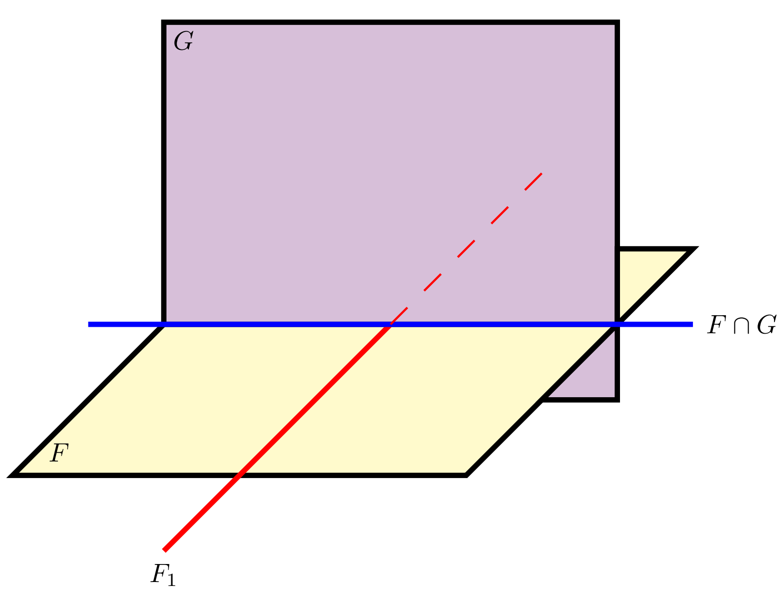


Fig. 16.2 – *Dimension de* $F+G$ : $F = F_1 \oplus (F \cap G)$ *et* $F+G = G \oplus F_1$

Théorème 16.15 : **Caractérisation des supplémentaires**
Soit $E$ un ev de dimension finie $n$ et $F,G$ deux sev de $E$. Alors

$$\boxed{(E = F \oplus G) \iff (F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim F + \dim G = n)}$$

$$(E = F \oplus G) \iff (F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = n)$$

*Remarque* 187. En pratique, on utilise souvent la première caractérisation, car il est simple de montrer que $F \cap G = \{0\}$.

*Exercice 16-5*
Soit $E = \mathbb{R}^4$, $F = \mathrm{Vect}((1,2,1,1),(0,1,1,1))$ et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x = y\}$. Montrer que $F \oplus G = E$.

---

*Exercice 16-6*
Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathrm{Vect}((1,0,1,0),(1,2,0,0))$. Trouver un supplémentaire de $F$ dans $E$

---

*Exercice 16-7*
Soit $E = \mathbb{R}^4$ et

$$F = \mathrm{Vect}((1,1,\lambda,3),(0,1,1,2)) \quad G = \{(x,y,z,t) \in E \mid x - y + z = 0, x + 2y - t = 0\}$$

A quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ a-t-on $F = G$?

---

*Exercice 16-8*
Soit $E$ un K-ev de dimension finie $n$ et $H$ un hyperplan de $E$. Déterminer $\dim H$.

---

Théorème 16.16 : **Dimension d'un espace produit**
Si $E$ et $F$ sont deux ev de dimension finie,

$$\boxed{\dim(E \times F) = \dim E + \dim F}$$

## 16.4 Applications linéaires en dimension finie — formule du rang

Théorème 16.17 : **Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base**
Soit $E$ un ev de dimension finie $n$, $F$ un ev quelconque , $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ un système de $n$ vecteurs de $F$.

1. Il existe une unique application linéaire $u \in L(E,F)$ telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad u(e_i) = f_i$$

2. ($u$ injective) $\iff$ ($f$ libre ) ;
3. ($u$ surjective) $\iff$ ($f$ générateur ).

*Remarque* 188. Le théorème précédent est important : il dit que pour déterminer une application linéaire, il suffit de donner l'image d'une base par cette application.

Théorème 16.18 : **Dimension de** $L(E,F)$
Si $E$ et $F$ sont de dimension finie, alors $L(E,F)$ est également de dimension finie et

$$\boxed{\dim L(E,F) = \dim E \times \dim F}$$

*Remarque* 189. En particulier, si l'espace $E$ est de dimension finie, son dual $E^\star$ est également de dimension finie et $\dim E^\star = \dim E$.

Théorème 16.19 : **Espaces isomorphes**
Soient deux ev $E$ et $F$ de dimension finie. On dit qu'ils sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $u : E \mapsto F$. On a la caractérisation

$$(E \text{ et } F \text{ isomorphes }) \iff (\dim E = \dim F)$$

**DÉFINITION 16.3 : Rang d'un système de vecteurs, d'une application linéaire**
Soit un espace vectoriel $E$ de dimension finie et un système de vecteurs $S = (x_1, \dots, x_n)$. On appelle *rang* du système $S$, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $S$ :

$$\mathrm{rg}(S) = \dim \mathrm{Vect}(S)$$

Si $E$ et $F$ sont de dimension finie et $u \in L(E,F)$, on appelle *rang* de $u$, la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\, u$ :

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$$

**THÉORÈME 16.20 : Le rang d'une application linéaire est le rang du système de vecteurs image d'une base par l'application**
Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$ et $u \in L(E,F)$,

$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$$

**THÉORÈME 16.21 : Formule du rang**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, $F$ un espace vectoriel quelconque et une application linéaire $u \in L(E,F)$. On a la *formule du rang* :

$$\boxed{\dim E = \dim \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{rg}\, u}$$

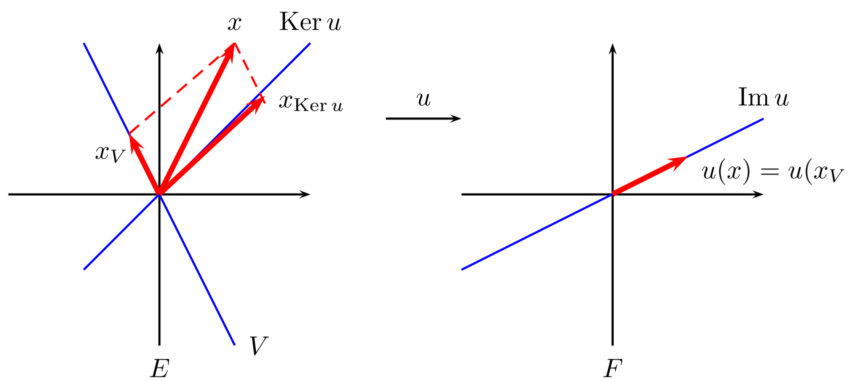


FIG. 16.3 – *Formule du rang :* $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus V$ *et* $V \approx \mathrm{Im}\, u$

*Remarque* 190. On montre dans la démonstration de la formule du rang, que $\mathrm{Im}\, u$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$, mais en général, si $u$ est un endomorphisme, $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ ne sont pas supplémentaires. Trouver un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ pour lequel $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u$ !

**THÉORÈME 16.22 : Isomorphismes en dimension finie**
Soient deux espaces vectoriels $(E,n)$ et $(F,n)$ sur le corps $\mathbb{K}$ de *même dimension finie* $n$. Soit une application linéaire $u \in L(E,F)$. Alors

$$\big(u \text{ injective }\big) \iff \big(u \text{ surjective }\big) \iff \big(u \text{bijective}\big)\big)$$

*Remarque* 191. Ce théorème est bien entendu faux si les deux espaces n'ont pas la même dimension.

## 16.5 Endomorphismes en dimension finie

**THÉORÈME 16.23 : Caractérisation des automorphismes**
Soit un espace vectoriel $E$ de dimension finie et un endomorphisme $u \in L(E)$. On a :

$$(u \text{ injective}) \iff (u \text{ bijective})$$

$$(u \text{ surjective}) \iff (u \text{ bijective})$$

*Remarque* 192. Ce théorème est très utile en pratique. On montre qu'un endomorphisme est injectif (le plus facile) et alors en dimension finie il est automatiquement bijectif.

*Exercice 16-9*

Soit $E$ un K-ev de dimension finie $n$, $F$ un K-ev de dimension finie $p$ et $u \in L(E,F)$. Montrer que $\mathrm{rg}(u) \leq \min(n,p)$.

---

*Exercice 16-10*

Soit $E$ un K-ev de dimension finie $n$, $F$ un K-ev de dimension finie $p$ et $u,v \in L(E,F)$. Montrer que

$$\left|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)\right| \leq \mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$$

---

*Exercice 16-11*

Soit $E$ un K-ev de dimension finie $n$, et $u \in L(E)$. Montrer que

$$(\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u) \iff (u^2 = 0 \text{ et } n = 2\,\mathrm{rg}(u))$$

---

*Exercice 16-12*

On considère $(n+1)$ réels distincts $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et l'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \big(P(x_0), \dots, P(x_n)\big) \end{array} \right.$$

a) Montrer que $\phi$ est un isomorphisme.
b) En déduire que si $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [0,n]$, $P(x_i) = y_i$ (polynôme interpolateur de Lagrange). c) Soient deux réels distincts $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et quatre réels $(\alpha,\beta,\delta,\gamma) \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant

$$P(a) = \alpha,\ P'(a) = \beta,\ P(b) = \delta,\ P'(b) = \gamma$$

---

Théorème 16.24 : **Inverses à gauche et à droite**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme $u \in L(E)$. On dit que

1. $u$ est inversible à gauche ssi il existe $v \in L(E)$ tel que $v \circ u = \mathrm{id}$ ;
2. $u$ est inversible à droite ssi il existe $w \in L(E)$ tel que $u \circ w = \mathrm{id}$ ;
3. $u$ est inversible ssi il existe $u^{-1} \in L(E)$ tel que $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \mathrm{id}$.

On a la caractérisation :

$$(u \text{ inversible à gauche }) \iff (u \text{ inversible à droite }) \iff (u \text{ inversible })$$

*Remarque* 193. Ce résulat est faux en dimension infinie comme le montre le contre-exemple suivant. Soit $\mathcal{S}$ l'espace des suites réelles. On définit deux endomorphismes (le « shift » à gauche et à droite) :

$$s_g : (a_0,a_1, \dots) \mapsto (a_1,a_2, \dots)$$

$$s_d : (a_0,a_1, \dots) \mapsto (0,a_1,a_2, \dots)$$

Etudier l'injectivité, la surjectivité de $s_g$, $s_d$. Calculer $s_g \circ s_d$ et $s_d \circ s_g$.

*Exercice 16-13*

Soit $E$ un K-ev de dimension finie $n$ et $u,v \in L(E,F)$. Montrer que

$$u^2 \circ v - u \circ v \circ u + \mathrm{id} = 0 \Rightarrow u \in GL(E)$$

---

*Exercice 16-14*

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in E$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in E$ vérifiant $P' + P = Q$.

---