Chapitre 18

Développements limités

18.1 Définitions

Définition 18.1 : **DL**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et un point $x_0 \in I$. On dit que la fonction f admet un *développement limité* à l'ordre n en x_0 s'il existe un polynôme

$$F(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

de degré $\leq n$ et une fonction $\varepsilon : I \mapsto \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = F(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

On dit alors que $F(x)$ est la *partie régulière* du DL et $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est le *reste* du DL. On écrit le reste sous la forme $o\big((x - x_0)^n\big)$.

Remarque 204. Par un changement de variables $h = x - x_0$ ou $h = 1/x$, on peut toujours se ramener au cas où $x_0 = 0$. Dorénavant, nous parlerons uniquement de DL en 0.

Théorème 18.1 : **DL de $\dfrac{1}{1-x}$**
La fonction $\dfrac{1}{1-x}$ définie sur $]-\infty,1[$ admet un $DL(0,n)$ quel que soit n, et l'on connaît *explicitement* le reste :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}}$$

où $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \dfrac{x}{1-x}$ et $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

On en déduit d'autres DL :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n})$$

Théorème 18.2 : **Unicité d'un DL et applications**
Soit une fonction f admettant un $DL(0,n)$. Alors :

1. la partie principale est unique ;
2. $\forall k \leq n$, f admet un $DL(0,k)$ obtenu en tronquant la partie principale du $DL(0,n)$ à l'ordre k ;
3. Si f est paire (reps. impaire) sur un voisinage de 0, alors la partie principale du DL est un polynôme pair (resp. impair).

Remarque 205. Si la fonction f est paire, et si elle admet un DL à l'ordre $(2n + 1)$, alors son DL s'écrit :

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

Théorème 18.3 : **Combinaison linéaire de DL**
Soient deux fonctions f et g qui admettent des $DL(0,n)$ de partie régulière $F(x)$ et $G(x)$. Soient deux scalaires $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un $DL(0,n)$ de partie régulière $\lambda F(x) + \mu G(x)$.

18.2 Développements limités classiques.

18.2.1 Obtention par Taylor-Young

Théorème 18.4 : Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage de 0, alors f possède un $DL(0,n)$ donné par la forule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

On obtient alors les DL suivants :

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Deux cas particuliers lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)}$$

Exercice 18-1

Exprimer les coefficients a_k et b_k des $DL(0,n)$ de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ et de $\sqrt{1-x}$ que l'on exprimera à l'aide de coefficients binômiaux.

18.2.2 Obtention de DL par primitivation

Théorème 18.5 : **Primitivation d'un DL**
Soit un intervalle I contenant 0 et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On suppose que la fonction f' admet un $DL(0,n)$ de la forme

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors f admet un $DL(0,n+1)$ obtenu en primitivant la partie régulière et en ajoutant $f(0)$:

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Remarque 206. Ce théorème est très utile pour trouver des DL de fonctions dont les dérivées sont simples, comme les fonctions trigonométriques inverses.
On obtient les DL suivants par primitivation :

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$\boxed{\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

Exercice 18-2
Trouver un $DL(0,5)$ de la fonction $f(x) = \arctan(\frac{1}{x})$.

Remarque 207. On peut primitiver les développements limités grâce au théorème précédent, mais on n'a pas le droit de les *dériver*.

18.2.3 Produit de DL

Théorème 18.6 : **Produit de DL**
Si deux fonctions f et g admettent des $DL(0,n)$ de parties régulières $F(x)$ et $G(x)$, alors la fonction fg admet un $DL(0,n)$ de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur à n dans le polynôme $F(x)G(x)$.

Remarque 208. Les termes de degré $\geq n$ n'ont aucune signification !

Exercice 18-3
Obtenir le $DL(0,2)$ de $(1-x) = \sqrt{1-x}\sqrt{1-x}$ par produit de DL.

Exercice 18-4
Trouver le $DL(0,3)$ des fonctions $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$ et $g(x) = \dfrac{\sin x \operatorname{sh} x}{\sqrt{1-x^2}}$.

18.2.4 Obtention de DL par composition

Théorème 18.7 : **Composée de DL**
Si la fonction f admet un $DL(0,n)$ et la fonction g un $DL(0,n)$, et si $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0}$, alors la fonction $g \circ f$ admet un $DL(0,n)$ de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur à n dans le polynôme $G \circ F(x)$.

Exercice 18-5
Trouver les $DL(0,3)$ des fonctions $\sin(\operatorname{sh} x)$ et $\operatorname{ch}(\ln(1+x))$.

Exercice 18-6
Trouver le $DL(0,2)$ de $e^{\sqrt{1+x^2}}$ et le $DL(0,2)$ de $\ln(1+x+\sqrt{1+x})$.

Exercice 18-7
Trouver le $DL(\frac{\pi}{4},3)$ de $\sin x$.

Exercice 18-8
Trouver le $DL(0,2)$ de $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)$.

Exercice 18-9

Déterminer le $DL(0,5)$ de la fonction tangente, en utilisant :

1. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et en faisant les produits de DL ;
2. la relation $\forall x \in]-\pi/2,\pi/2[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)}$$

18.3 Applications des développements limités

18.3.1 Recherche de limites et d'équivalents

Pour chercher $\lim_{x\to x_0} f(x)$:

1. La limite est-elle évidente ?
2. On effectue un changement de variables $h = (x - x_0)$ ou $h = \dfrac{1}{x}$ pour se ramener en 0 ;
3. si f est définie comme produit de fonctions, on cherche séparément un équivalent simple de chaque produit ;
4. un développement limité $h(x) = a_k x^k + o(x^k)$ avec $a_k \neq 0$ donne l'équivalent $h(x) \sim a_k x^k$;
5. on peut sommer des DL, c'est leur principal avantage sur les équivalents.

Exercice 18-10

Trouver $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x^2}$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{sh} x}{x^3}$.

Exercice 18-11

Trouver $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x) + \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{2}}{\sin^4 x}$.

Exercice 18-12

Trouver $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ et un équivalent de $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x - e$.

Exercice 18-13

Trouver la limite de la suite de terme général $u_n = \left(\dfrac{\cos \frac{1}{n} + \operatorname{ch} \frac{1}{n}}{2}\right)^{n^4}$.

18.3.2 Prolongement d'une fonction

Théorème 18.8 : **DL et prolongement**

Soit une fonction f définie sur l'intervalle $]0,a[$ admettant un $DL(0,n)$ en 0 avec $n \geq 1$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$$

Alors

1. la fonction f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = a_0$;
2. le prolongement de f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

Exercice 18-14

Etudier le prolongement en 0 de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Exercice 18-15

Montrer que la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 209. Un développement limité à un ordre supérieur à 2 n'apporte en général pas d'information sur la régularité de la fonction. En effet, considérons l'exemple suivant, avec $n \geq 2$:

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1} \sin\left(\dfrac{1}{x^n}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Cette fonction admet un $DL(0,n)$, avec $n \geq 2$. Elle est donc dérivable en 0, mais sa dérivée

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = (n+1)x^n \sin(1/x^n) - n \cos\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

n'a pas de limite lorsque $x \to 0$. Par conséquent, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$, et à fortiori, n'est pas deux fois dérivable au voisinage de 0. En d'autres termes, le coefficient a_2 d'un $DL(0,2)$ n'apporte pas d'informations en général sur $f''(0)$!

THÉORÈME 18.9 : **Position locale par rapport à la tangente**
Si une fonction f admet un DL en x_0 de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + o\big((x - x_0)^k\big), \quad a_k \neq 0$$

Alors
1. l'équation de la tangente en x_0 est $Y = a_0 + a_1(X - x_0)$;
2. $f(x) - [a_0 + a_1(x - x_0)] \sim a_k(x - x_0)^k$, et en fonction du signe de a_k et de la parité de k, on en déduit la position locale de la courbe par rapport à sa tangente.

Exercice 18-16
Etude locale en 0 des fonctions définies par $\dfrac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$ et $\dfrac{\sin^2 x}{x}$.

Exercice 18-17
Etudier complètement les prolongements en 0 des fonctions définies par $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ et $g(x) = \dfrac{(e^{\operatorname{sh} x} - \cos x)^2}{\ln \cos x}$.

18.3.3 Branches infinies d'une courbe $y = f(x)$

Pour étudier une branche infinie d'une courbe $y = f(x)$ en $\pm\infty$:
1. on fait le changement de variables $h = \dfrac{1}{x}$.
2. on effectue un « développement généralisé » de $\widetilde{f}(h)$ en 0 avec un terme significatif qui tend vers 0 ;
3. on revient à $f(x)$: on obtient un « développement asymptotique » que l'on interprète pour trouver l'équation d'une asymptote et la position locale de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exercice 18-18
Etude complète de la fonction définie par $f(x) = (x + 2)e^{1/x}$.

Exercice 18-19
Etudier les branches infinies de la courbe représentative de $f(x) = x^2 e^{x/(x^2-1)}$.

18.3.4 Étude locale des courbes paramétrées

On considère un arc paramétré $(I, \overrightarrow{F})$ et un point stationnaire $M(t_0)$.

THÉORÈME 18.10 : **Tangente en un point stationnaire**
Si $\overrightarrow{F}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, et s'il existe $p \leq k$ tel que $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors la courbe possède une tangente au point $M(t_0)$ dirigée par le premier vecteur $\overrightarrow{F'}(t_0), \ldots, \overrightarrow{F^p}(t_0)$ non-nul.

THÉORÈME 18.11 : Position locale de la courbe par rapport à sa tangente

On suppose que la fonction $\overrightarrow{F}$ est suffisamment régulière, et qu'il existe deux entiers $1 \leq p < q$ tels que :

1. $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ est le premier vecteur non-nul parmi $\overrightarrow{F'}(t_0), \dots, \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$.
2. q est le premier entier parmi $p+1, \dots, q$ tel que le système de vecteurs $(\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0))$ soit libre (il forme donc une base de $\mathbb{R}^2$).

Alors le vecteur $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ dirige la tangente à la courbe au point $M(t_0)$, et pour $t \neq t_0$, on peut décomposer dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \left(\dfrac{\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)}{p!}, \dfrac{\overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)}{q!}\right)$ le vecteur

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{F}(t_0) = X(t)\overrightarrow{u} + Y(t)\overrightarrow{v}$$

Alors lorsque $t \to t_0$,

$$X(t) \sim (t-t_0)^p, \quad Y(t) \sim (t-t_0)^q$$

On en déduit alors la position locale de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de t_0, en fonction de la parité des entiers p et q.

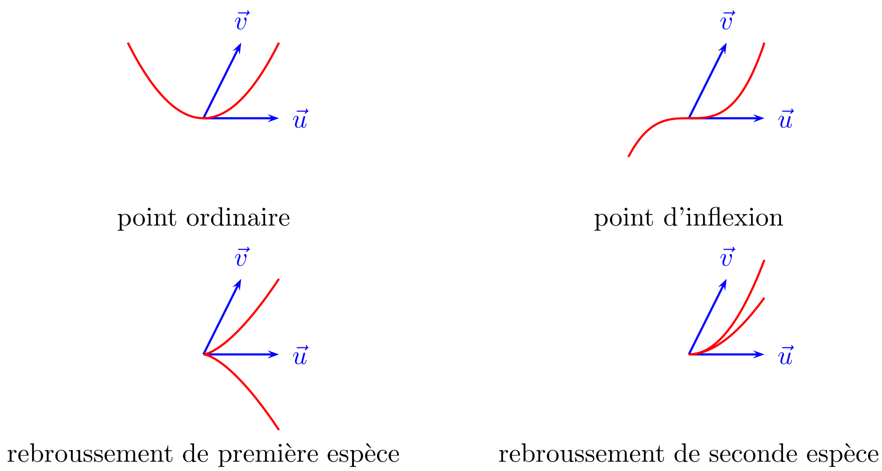

FIG. 18.1 – *Étude locale d'une courbe paramétrée*

Remarque 210. Il est plus simple de faire un développement limité des deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de t_0 (à l'ordre 3 au moins si $M(t_0)$ est un point stationnaire), et d'interpréter vectoriellement ce développement limité.

Exercice 18-20

On considère la courbe paramétrée définie par $x(t) = 3\cos t - 2\sin^3 t$, $y(t) = \cos 4t$ $(t \in [0,\pi])$

a) Déterminer les points stationnaires de cette courbe.

b) Faire l'étude locale en ces points.

18.3.5 Branches infinies des courbes paramétrées

On peut étudier l'existence de courbes asymptotes et préciser la position locale de la courbe par rapport à ces asymptotes. Pour cela, on utilise un développement asymptotique des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ par rapport à t lorsque $t \to t_0$ avec *un terme significatif* qui tend vers 0. On essaie alors de faire une combinaison linéaire des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ pour éliminer les termes tendant vers l'infini. Si on trouve une relation du type

$$y(t) = ax(t) + b + c(t-t_0)^k + o\left((t-t_0)^k\right)$$

alors on en déduit que la droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe et la position locale de la courbe par rapport à son asymptote se déduit du signe de c et de la parité de k.

Exercice 18-21

Étudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{(t-2)(t+1)} \\ y(t) &= \dfrac{t^2(t+2)}{t+1} \end{cases}$$

Exercice 18-22

Étudier la branche infinie lorsque $t \to \pm\infty$ de la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{t+1} \\ y(t) &= \dfrac{t^4}{2+t} \end{cases}$$

18.3.6 Équations différentielles non-normalisées

On considère une équation différentielle non-normalisée

$$(E) : \quad a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

sur un intervalle $I =]\alpha,\beta[$. On suppose que la fonction a s'annule une seule fois en un point $t_0 \in I$.

1. On résout (E) sur l'intervalle $I_1 =]\alpha,t_0[$. Les solutions de (E) sur I_1 sont les solutions de l'équation normalisée
$$(E_1) : \quad y' + \frac{b(t)}{a(t)}y = \frac{c(t)}{a(t)}$$
et sont de la forme :
$$y_1(t) = \lambda y_0^1(t) + \widetilde{y}_1(t)$$
2. On résout de la même façon l'équation différentielle sur l'intervalle $I_2 =]t_0,\beta[$ et on trouve sur I_2 des solutions de la forme
$$y_2(t) = \mu y_0^2(t) + \widetilde{y}_2(t)$$
3. On détermine les constantes λ,μ pour définir une fonction $y(t)$ sur I par :
$$y : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \lambda y_0^1(t) + \widetilde{y}_2(t) & \text{si } t \in]\alpha,t_0[\\ \theta & \text{si } t = t_0 \\ \mu y_0^2 + \widetilde{y}_2(t) \text{ si } t \in]t_0,\beta[\end{cases} \end{cases}$$
4. On doit vérifier que y est dérivable en t_0 ;
5. On doit vérifier que $b(t_0)y(t_0) = c(t_0)$.

Exercice 18-23

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \ : x(x^2+1)y' + y + x = 0$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 18-24

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : 2t(1+t)y' + (1+t)y = 1$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Exercice 18-25

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : (x+1)y' = y + 1$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
