

Chapitre 18

Développements limités

18.1 Définitions

DÉFINITION 18.1 : DL

Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et un point $x_0 \in I$. On dit que la fonction f admet un *développement limité* à l'ordre n en x_0 s'il existe un polynôme

$$F(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

de degré $\leq n$ et une fonction $\varepsilon : I \mapsto \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = F(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

On dit alors que $F(x)$ est la *partie régulière* du DL et $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est le *reste* du DL. On écrit le reste sous la forme $o((x - x_0)^n)$.

Remarque 204. Par un changement de variables $h = x - x_0$ ou $h = 1/x$, on peut toujours se ramener au cas où $x_0 = 0$. Dorénavant, nous parlerons uniquement de DL en 0.

THÉORÈME 18.1 : DL de $\frac{1}{1-x}$

La fonction $\frac{1}{1-x}$ définie sur $] -\infty, 1[$ admet un $DL(0, n)$ quel que soit n , et l'on connaît *explicitement* le reste :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

où $\frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \frac{x}{1-x}$ et $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

On en déduit d'autres DL :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n})$$

THÉORÈME 18.2 : Unicité d'un DL et applications

Soit une fonction f admettant un $DL(0, n)$. Alors :

1. la partie principale est unique ;
2. $\forall k \leq n$, f admet un $DL(0, k)$ obtenu en tronquant la partie principale du $DL(0, n)$ à l'ordre k ;
3. Si f est paire (reps. impaire) sur un voisinage de 0, alors la partie principale du DL est un polynôme pair (resp. impair).

Remarque 205. Si la fonction f est paire, et si elle admet un DL à l'ordre $(2n + 1)$, alors son DL s'écrit :

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

THÉORÈME 18.3 : Combinaison linéaire de DL

Soient deux fonctions f et g qui admettent des $DL(0,n)$ de partie régulière $F(x)$ et $G(x)$. Soient deux scalaires $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un $DL(0,n)$ de partie régulière $\lambda F(x) + \mu G(x)$.

18.2 Développements limités classiques.

18.2.1 Obtention par Taylor-Young

THÉORÈME 18.4 : Si une fonction f est de classe \mathcal{C}^n sur un voisinage de 0, alors f possède un $DL(0,n)$ donné par la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

On obtient alors les DL suivants :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Deux cas particuliers lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

Exercice 18-1

Exprimer les coefficients a_k et b_k des $DL(0,n)$ de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ et de $\sqrt{1-x}$ que l'on exprimera à l'aide de coefficients binômiaux.

18.2.2 Obtention de DL par primitivation

THÉORÈME 18.5 : Primitivation d'un DL

Soit un intervalle I contenant 0 et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur I . On suppose que la fonction f' admet un $DL(0,n)$ de la forme

$$f'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$

Alors f admet un $DL(0,n+1)$ obtenu en primitivant la partie régulière et en ajoutant $f(0)$:

$$f(x) = f(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Remarque 206. Ce théorème est très utile pour trouver des DL de fonctions dont les dérivées sont simples, comme les fonctions trigonométriques inverses.

On obtient les DL suivants par primitivation :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Exercice 18-2

Trouver un $DL(0,5)$ de la fonction $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Remarque 207. On peut primitiver les développements limités grâce au théorème précédent, mais on n'a pas le droit de les dériver.

18.2.3 Produit de DL

THÉORÈME 18.6 : Produit de DL

Si deux fonctions f et g admettent des $DL(0,n)$ de parties régulières $F(x)$ et $G(x)$, alors la fonction fg admet un $DL(0,n)$ de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur à n dans le polynôme $F(x)G(x)$.

Remarque 208. Les termes de degré $\geq n$ n'ont aucune signification !

Exercice 18-3

Obtenir le $DL(0,2)$ de $(1-x) = \sqrt{1-x}\sqrt{1+x}$ par produit de DL.

Exercice 18-4

Trouver le $DL(0,3)$ des fonctions $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1-x}$ et $g(x) = \frac{\sin x \operatorname{sh} x}{\sqrt{1-x^2}}$.

18.2.4 Obtention de DL par composition

THÉORÈME 18.7 : Composée de DL

Si la fonction f admet un $DL(0,n)$ et la fonction g un $DL(0,n)$, et si $\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}$, alors la fonction $g \circ f$ admet un $DL(0,n)$ de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur à n dans le polynôme $G \circ F(x)$.

Exercice 18-5

Trouver les $DL(0,3)$ des fonctions $\sin(\operatorname{sh} x)$ et $\operatorname{ch}(\ln(1+x))$.

Exercice 18-6

Trouver le $DL(0,2)$ de $e^{\sqrt{1+x^2}}$ et le $DL(0,2)$ de $\ln(1+x+\sqrt{1+x})$.

Exercice 18-7

Trouver le $DL\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$ de $\sin x$.

Exercice 18-8

Trouver le $DL(0,2)$ de $f(x) = \arctan\left(\frac{2+x}{1+x}\right)$.

Exercice 18-9

Déterminer le $DL(0,5)$ de la fonction tangente, en utilisant :

1. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et en faisant les produits de DL ;
2. la relation $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$$

18.3 Applications des développements limités

18.3.1 Recherche de limites et d'équivalents

Pour chercher $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$:

1. La limite est-elle évidente ?
2. On effectue un changement de variables $h = (x - x_0)$ ou $h = \frac{1}{x}$ pour se ramener en 0 ;
3. si f est définie comme produit de fonctions, on cherche séparément un équivalent simple de chaque produit ;
4. un développement limité $h(x) = a_k x^k + o(x^k)$ avec $a_k \neq 0$ donne l'équivalent $h(x) \sim a_k x^k$;
5. on peut sommer des DL, c'est leur principal avantage sur les équivalents.

Exercice 18-10

Trouver $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{sh} x}{x^3}$.

Exercice 18-11

Trouver $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x) + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2}}{\sin^4 x}$.

Exercice 18-12

Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ et un équivalent de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e$.

Exercice 18-13

Trouver la limite de la suite de terme général $u_n = \left(\frac{\cos \frac{1}{n} + \operatorname{ch} \frac{1}{n}}{2}\right)^{n^4}$.

18.3.2 Prolongement d'une fonction

THÉORÈME 18.8 : DL et prolongement

Soit une fonction f définie sur l'intervalle $]0, a[$ admettant un $DL(0, n)$ en 0 avec $n \geq 1$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$$

Alors

1. la fonction f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = a_0$;
2. le prolongement de f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

Exercice 18-14

Etudier le prolongement en 0 de la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Exercice 18-15

Montrer que la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Remarque 209. Un développement limité à un ordre supérieur à 2 n'apporte en général pas d'information sur la régularité de la fonction. En effet, considérons l'exemple suivant, avec $n \geq 2$:

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^n}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Cette fonction admet un $DL(0, n)$, avec $n \geq 2$. Elle est donc dérivable en 0, mais sa dérivée

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = (n+1)x^n \sin(1/x^n) - n \cos\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

n'a pas de limite lorsque $x \rightarrow 0$. Par conséquent, f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 , et à fortiori, n'est pas deux fois dérivable au voisinage de 0. En d'autres termes, le coefficient a_2 d'un $DL(0, 2)$ n'apporte pas d'informations en général sur $f''(0)$!

THÉORÈME 18.9 : Position locale par rapport à la tangente

Si une fonction f admet un DL en x_0 de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k), \quad a_k \neq 0$$

Alors

1. l'équation de la tangente en x_0 est $Y = a_0 + a_1(X - x_0)$;
2. $f(x) - [a_0 + a_1(x - x_0)] \sim a_k(x - x_0)^k$, et en fonction du signe de a_k et de la parité de k , on en déduit la position locale de la courbe par rapport à sa tangente.

Exercice 18-16

Etude locale en 0 des fonctions définies par $\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$ et $\frac{\sin^2 x}{x}$.

Exercice 18-17

Etudier complètement les prolongements en 0 des fonctions définies par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ et $g(x) = \frac{(e^{\operatorname{sh} x} - \cos x)^2}{\ln \cos x}$.

18.3.3 Branches infinies d'une courbe $y = f(x)$

Pour étudier une branche infinie d'une courbe $y = f(x)$ en $\pm\infty$:

1. on fait le changement de variables $h = \frac{1}{x}$.
2. on effectue un « développement généralisé » de $\tilde{f}(h)$ en 0 avec un terme significatif qui tend vers 0;
3. on revient à $f(x)$: on obtient un « développement asymptotique » que l'on interprète pour trouver l'équation d'une asymptote et la position locale de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exercice 18-18

Etude complète de la fonction définie par $f(x) = (x+2)e^{1/x}$.

Exercice 18-19

Etudier les branches infinies de la courbe représentative de $f(x) = x^2 e^{x/(x^2-1)}$.

18.3.4 Étude locale des courbes paramétrées

On considère un arc paramétré (I, \vec{F}) et un point stationnaire $M(t_0)$.

THÉORÈME 18.10 : Tangente en un point stationnaire

Si \vec{F} est une fonction de classe \mathcal{C}^k sur I , et s'il existe $p \leq k$ tel que $\vec{F}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$, alors la courbe possède une tangente au point $M(t_0)$ dirigée par le premier vecteur $\vec{F}'(t_0), \dots, \vec{F}^{(p)}(t_0)$ non-nul.

THÉORÈME 18.11 : Position locale de la courbe par rapport à sa tangente

On suppose que la fonction \vec{F} est suffisamment régulière, et qu'il existe deux entiers $1 \leq p < q$ tels que :

1. $\vec{F}^{(p)}(t_0)$ est le premier vecteur non-nul parmi $\vec{F}'(t_0), \dots, \vec{F}^{(p)}(t_0)$.
2. q est le premier entier parmi $p + 1, \dots, q$ tel que le système de vecteurs $(\vec{F}^{(p)}(t_0), \vec{F}^{(q)}(t_0))$ soit libre (il forme donc une base de \mathbb{R}^2).

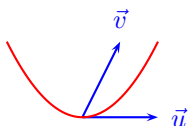
Alors le vecteur $\vec{F}^{(p)}(t_0)$ dirige la tangente à la courbe au point $M(t_0)$, et pour $t \neq t_0$, on peut décomposer dans la base $(\vec{u}, \vec{v}) = \left(\frac{\vec{F}^{(p)}(t_0)}{p!}, \frac{\vec{F}^{(q)}(t_0)}{q!} \right)$ le vecteur

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \vec{F}(t) - \vec{F}(t_0) = X(t)\vec{u} + Y(t)\vec{v}$$

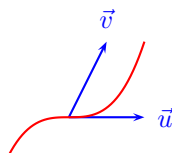
Alors lorsque $t \rightarrow t_0$,

$$X(t) \sim (t - t_0)^p, \quad Y(t) \sim (t - t_0)^q$$

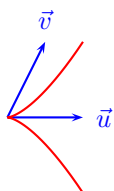
On en déduit alors la position locale de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de t_0 , en fonction de la parité des entiers p et q .



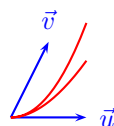
point ordinaire



point d'inflexion



rebroussement de première espèce



rebroussement de seconde espèce

FIG. 18.1 – Étude locale d'une courbe paramétrée

Remarque 210. Il est plus simple de faire un développement limité des deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de t_0 (à l'ordre 3 au moins si $M(t_0)$ est un point stationnaire), et d'interpréter vectoriellement ce développement limité.

Exercice 18-20

On considère la courbe paramétrée définie par $x(t) = 3 \cos t - 2 \sin^3 t$, $y(t) = \cos 4t$ ($t \in [0, \pi]$)

- Déterminer les points stationnaires de cette courbe.
- Faire l'étude locale en ces points.

18.3.5 Branches infinies des courbes paramétrées

On peut étudier l'existence de courbes asymptotes et préciser la position locale de la courbe par rapport à ces asymptotes. Pour cela, on utilise un développement asymptotique des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ par rapport à t lorsque $t \rightarrow t_0$ avec un terme significatif qui tend vers 0. On essaie alors de faire une combinaison linéaire des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ pour éliminer les termes tendant vers l'infini. Si on trouve une relation du type

$$y(t) = ax(t) + b + c(t - t_0)^k + o((t - t_0)^k)$$

alors on en déduit que la droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe et la position locale de la courbe par rapport à son asymptote se déduit du signe de c et de la parité de k .

Exercice 18-21

Étudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{(t-2)(t+1)} \\ y(t) = \frac{t^2(t+2)}{t+1} \end{cases}$$

Exercice 18-22

Étudier la branche infinie lorsque $t \rightarrow \pm\infty$ de la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{t+1} \\ y(t) = \frac{t^4}{2+t} \end{cases}$$

18.3.6 Équations différentielles non-normalisées

On considère une équation différentielle non-normalisée

$$(E) : a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

sur un intervalle $I =]\alpha, \beta[$. On suppose que la fonction a s'annule une seule fois en un point $t_0 \in I$.

1. On résout (E) sur l'intervalle $I_1 =]\alpha, t_0[$. Les solutions de (E) sur I_1 sont les solutions de l'équation normalisée

$$(E_1) : y' + \frac{b(t)}{a(t)}y = \frac{c(t)}{a(t)}$$

et sont de la forme :

$$y_1(t) = \lambda y_0^1(t) + \tilde{y}_1(t)$$

2. On résout de la même façon l'équation différentielle sur l'intervalle $I_2 =]t_0, \beta[$ et on trouve sur I_2 des solutions de la forme

$$y_2(t) = \mu y_0^2(t) + \tilde{y}_2(t)$$

3. On détermine les constantes λ, μ pour définir une fonction $y(t)$ sur I par :

$$y : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \lambda y_0^1(t) + \tilde{y}_2(t) & \text{si } t \in]\alpha, t_0[\\ \theta & \text{si } t = t_0 \\ \mu y_0^2 + \tilde{y}_2(t) & \text{si } t \in]t_0, \beta[\end{cases} \end{cases}$$

4. On doit vérifier que y est dérivable en t_0 ;
5. On doit vérifier que $b(t_0)y(t_0) = c(t_0)$.

Exercice 18-23

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : x(x^2 + 1)y' + y + x = 0$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 18-24

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : 2t(1+t)y' + (1+t)y = 1$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Exercice 18-25

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : (x+1)y' = y+1$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
