Chapitre 19

Déterminants

19.1 Groupe symétrique

DÉFINITION 19.1 : **Groupe symétrique**
Soit un ensemble E. On appelle *permutation* de E, une bijection $\sigma : E \mapsto E$. On note $\mathfrak{S}_E$ l'ensemble des permutations de l'ensemble E. Puisque $\mathfrak{S}_E = \mathcal{B}(E)$, on sait que $\left(\mathfrak{S}_E,\circ\right)$ est un groupe, appelé *groupe des permutations* de l'ensemble E.

Dans la suite, on considèrera un ensemble fini E de cardinal n, et en particulier $E = [\![1,n]\!]$.

DÉFINITION 19.2 : **Groupe symétrique**
Lorsque l'ensemble $E = [\![1,n]\!]$, on note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de E qui est un groupe fini de cardinal $n!$. Ce groupe s'appelle le *groupe symétrique* d'ordre n. Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se note

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

19.1.1 Cycles, transpositions

DÉFINITION 19.3 : **Orbite d'un élément**
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$ et un élément $x \in E$. On appelle *orbite* de l'élément x selon la permutation σ, l'ensemble $\mathcal{O}(x) = \{\sigma^k(x)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

`Exemple 27.` Si $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, et $\sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 2&1&5&3&6&4 \end{pmatrix}$, $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(2) = \{1,2\}$ et $\mathcal{O}(3) = \mathcal{O}(4) = \mathcal{O}(5) = \mathcal{O}(6) = \{3,4,5,6\}$.

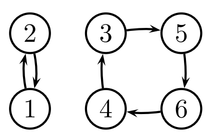


FIG. 19.1 – *Orbites d'une permutation*

Remarque 211. Si $y \in \mathcal{O}(x)$, alors $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$.

DÉFINITION 19.4 : **Permutation circulaire**
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$. On dit que c'est une *permutation circulaire* s'il existe un élément $x \in E$ tel que $\mathcal{O}(x) = E$.

`Exemple 28.` Si $E = \{1,2,3,4\}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&4&2&1 \end{pmatrix}$ est une permutation circulaire :

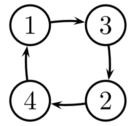


FIG. 19.2 – *Permutation circulaire*

Remarque 212. Il y a $(n-1)!$ permutations circulaires dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Définition 19.5 : Cycle
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$. On dit que σ est un *cycle* s'il y a au plus une orbite qui n'est pas réduite à un élément. Cette orbite s'appelle le *support* du cycle, et le cardinal de cette orbite s'appelle la *longueur* du cycle.

`Exemple 29.` $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{smallmatrix}\right)$, est un cycle de support $\{1,2,3\}$ et de longueur 3. On note plus simplement $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ un tel cycle.

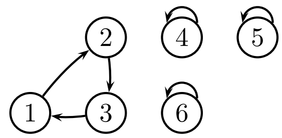


Fig. 19.3 – *Un cycle de longueur* 3

Exercice 19-1
Déterminer le nombre de cycles de longueur p dans $\mathfrak{S}_n$. Quel est l'ordre d'un cycle dans le groupe $\mathfrak{S}_E$?

Lemme 19.1 : Deux cycles de supports disjoints commutent
Soient deux cycles σ_1 et σ_2 de $\mathfrak{S}_E$ de supports disjoints. Alors $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.

Théorème 19.2 : Décomposition d'une permutation en produit de cycles
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$. Elle se décompose en un produit fini de cycles de supports disjoints qui commutent deux à deux.

Exercice 19-2
Décomposer la permutation $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 1 & 2 & 4 & 6 & 7 & 5 & 8 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ en produit de cycles, puis calculer la permutations σ^{2001}. Déterminer ensuite le cardinal du sous-groupe engendré par σ dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 19-3
Déterminer les ordres des éléments du groupe $\mathfrak{S}_4$.

Définition 19.6 : Transpositions
Une *transposition* de $\mathfrak{S}_E$ est un cycle de longueur 2. Une transposition échange deux éléments a, b et laisse les autres invariants. On note τ_{ab} cette transposition.

Exercice 19-4
Quel est le nombre de transpositions dans le groupe $\mathfrak{S}_n$? Quel est l'ordre d'une transpostion ? Dans $\mathfrak{S}_n$, $(n \geq 3)$, calculer $\tau_{12} \circ \tau_{23}$ et $\tau_{23} \circ \tau_{12}$.

Théorème 19.3 : Décomposition d'une permutation en produit de transpositions
Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en un produit fini de transpositions :

$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$$

(Il n'y a pas unicité de la décomposition et les transpositions ne commutent pas).

Remarque 213. En d'autres termes, l'ensemble des transpositions engendre le groupe symétrique.

Exercice 19-5
Décomposer la permutation $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ en produit de transpositions.

Exercice 19-6
Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, calculer $\tau_{1i} \circ \tau_{1j} \circ \tau_{1i}$ et montrer que les transpositions de la forme τ_{1i} engendrent le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

19.1.2 Signature d'une permutation

DÉFINITION 19.7 : **Signature d'une permutation**
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On dit qu'un couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ est un *inversion* de σ lorsque

$$i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)$$

On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de la permutation σ, et on définit la *signature* de la permutation σ par

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$$

Remarque 214. On dit qu'une permutation σ est *paire* si $\varepsilon(\sigma) = +1$ et *impaire* lorsque $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Exercice 19-7
Déterminer le nombre d'inversions et la signature de la permutation $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{smallmatrix}\right)$.

LEMME 19.4 : **Expression algébrique de la signature**
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On a les expressions suivantes pour sa signature :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{\substack{\{i,j\} \subset [\![1,n]\!] \\ i \neq j}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

THÉORÈME 19.5 : **La signature est un morphisme de groupe**
L'application

$$\varepsilon : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathfrak{S}_n, \circ) & \longrightarrow & (\{-1,1\}, \times) \\ \sigma & \mapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes. Le noyau de ce morphisme

$$\mathcal{A}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = +1\}$$

est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ qui s'appelle le *groupe alterné* d'ordre n.

LEMME 19.6 : **Effet des transpositions sur la signature**
Soit une permuation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et une transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Alors :

$$\varepsilon(\tau) = -1, \quad \varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\tau \circ \sigma) = -\varepsilon(\sigma)$$

PROPOSITION 19.7 : Le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est de cardinal $\dfrac{n!}{2}$. Si τ est une transposition quelconque, l'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \setminus \mathcal{A}_n \\ \sigma & \mapsto & \tau \circ \sigma \end{array} \right.$$

est une bijection.

COROLLAIRE 19.8 : **Autre caractérisation de la signature**
Si une permutation σ s'écrit comme produit de p transpositions,

$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$$

alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.

Remarque 215. La décomposition d'une permutation en produit de transpositions n'est pas unique, mais la *parité* du nombre de transpositions est la même pour toute décomposition.

Exercice 19-8
Dans les années 1870, Sam Loyd a offert une prime de 1000 dollars à la personne qui trouverait la solution du jeu de taquin suivant : la case 16 est vide, et les pièces peuvent glisser sur cette case vide. Lors du premier coup, on peut faire glisser la case 15 ou la case 12 sur la case vide, et ainsi de suite. Le défi consiste à obtenir la même configuration que la configuration initiale où les cases 14 et 15 sont inversées. Qu'en pensez-vous?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

FIG. 19.4 – *Position initiale et finale du puzzle* 15

19.2 Formes n-linéaires alternées

DÉFINITION 19.8 : **Applications n-linéaires**
Soient deux $\mathbb{K}$-ev E et F. On dit qu'une application $\phi : E^n \mapsto F$ est une application n-linéaire si et seulement si :

$$\begin{aligned} &\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in E^{n-1},\ \forall (x,y) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \\ &\phi(x_1,\dots,x_{i-1},\lambda x + \mu y,x_{i+1},\dots,x_n) = \lambda \phi(x_1,\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots,x_n) \\ &\qquad + \mu \phi(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_n) \end{aligned}$$

En d'autres termes, ϕ est linéaire par rapport à chacune des variables, les autres étant fixées. On note $\mathcal{L}^n(E,F)$ l'ensemble des applications n-linéaires sur l'espace vectoriel E à valeurs dans l'espace vectoriel F.

`Exemple 30.` Le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

$$\wedge : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & x \wedge y \end{array} \right.$$

est une application 2-linéaire de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Remarque 216. De la définition, on tire que $\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n$, $\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

1. $\phi(x_1,\dots,x_{i-1},0_E,x_{i+1},\dots,x_n) = 0_F$.
2. $\phi(\lambda_1 x_1,\dots,\lambda_n x_n) = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)\phi(x_1,\dots,x_n)$.

DÉFINITION 19.9 : **Forme n-linéaire**
Une application n-linéaire d'un espace E à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$ est appelée une *forme n-linéaire* sur E. On note $\mathcal{L}^n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires.

`Exemple 31.` Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$

$$(.\mid.) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right.$$

est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 19.10 : **Opération de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{L}^n(E)$**
Soit une forme n-linéaire $\phi \in \mathcal{L}^n(E)$ et une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On définit l'application

$$\sigma \star \phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_n) & \mapsto & \phi\big(x_{\sigma(1)},\dots x_{\sigma(n)}\big) \end{array} \right.$$

On vérifie que $\sigma \star \phi$ est également une forme n-linéaire.

DÉFINITION 19.11 : **Forme n-linéaire symétrique, antisymétrique**
Soit une forme n-linéaire $\phi \in \mathcal{L}^n(E)$. On dit que

1. ϕ est *symétrique* si et seulement si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma \star \phi = \phi$;
2. ϕ est *antisymétrique* si et seulement si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma \star \phi = \varepsilon(\sigma)\phi$ où $\varepsilon(\sigma) \in \{-1,1\}$ est la signature de la permutation σ.

Remarque 217. Les formes n-linéaires antisymétriques sont caractérisées par la propriété suivante : « lorsqu'on échange deux vecteurs, la valeur de la forme n-linéaire est changée en son opposé ». En effet, toute permutation est un produit de transpositions et une transposition est une permutation impaire.

Définition 19.12 : Formes n-linéaires alternées
Une forme n-linéaire ϕ est *alternée* si et seulement si

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$$
$$i \neq j \text{ et } x_i = x_j \Rightarrow \phi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) = 0_{\mathbb{K}}$$

On note $\mathcal{A}^n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E. C'est un $\mathbb{K}$-ev.

Théorème 19.9 : Équivalence entre antisymétrique et alternée
Si le corps $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, pour toute forme n-linéaire $\phi \in \mathcal{L}^n(E)$,

$$\underset{(i)}{\big(\phi \text{ alternée }\big)} \iff \underset{(ii)}{\big(\phi \text{ antisymétrique }\big)}$$

Théorème 19.10 : Une forme n-linéaire alternée détecte les systèmes liés
Soit une forme n-linéaire alternée $\phi \in \mathcal{A}^n(E)$ d'un espace de dimension finie quelconque p, et un système $S = (x_1,\dots,x_n)$ formé de n vecteurs de E. Alors

$$S \text{ lié } \Rightarrow \phi(x_1,\dots,x_n) = 0$$

Remarque 218. On en déduit que si E est un espace de dimension n, et si $p > n$, alors $\mathcal{A}^p(E) = \{0\}$.

19.3 Déterminant d'un système de vecteurs dans une base

Exercice 19-9

On considère un espace vectoriel E_2 de dimension 2, et (e_1,e_2) une base de cet espace. Déterminer l'ensemble des formes 2-linéaires alternées $\mathcal{A}^2(E_2)$.

On considère désormais un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n.

Théorème 19.11 : L'ensemble des formes n-linéaires alternées d'un espace de dimension n est une droite vectorielle
Soit $e = (e_1,\dots,e_n)$ une base de l'espace vectoriel E. Alors :

1. l'ensemble des formes n-linéaires alternées $\mathcal{A}^n(E)$ est une droite vectorielle.
2. Considérons l'application

$$\det_e : \begin{cases} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (X_1,\dots,X_n) & \mapsto & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n} \end{cases}$$

   où les scalaires x_{ij} sont les coordonnées des vecteurs $(X_1,\dots,X_n)$ dans la base e : $\operatorname{Mat}_e(X_1,\dots,X_n) = ((x_{ij}))_{1 \le i,j \le n}$. L'application $\det_e$ est l'unique forme n-linéaire alternée vérifiant $\det_e(e_1,\dots,e_n) = 1$.
3. On a $\mathcal{A}^n(E) = \operatorname{Vect}(\det_e)$.

Remarque 219. En généralisant le calcul précédent, on montre que la dimension de $\mathcal{A}^p(E_n)$ vaut 0 lorsque $p > n$, et $\binom{n}{p}$ lorsque $1 \le p \le n$.

Définition 19.13 : Déterminant d'un système de vecteurs dans une base
Soit un espace vectoriel E de dimension n et une base $e = (e_1,\dots,e_n)$ de cet espace. Soit un système de n vecteurs $S = (X_1,\dots,X_n)$. On note (x_{ij}) les coordonnées des vecteurs de S dans la base e. On appelle *déterminant* du système S dans la base e, le scalaire :

$$\det_e(S) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n}$$

on note ce scalaire

$$\det_e(S) = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

Théorème 19.12 : Formule de changement de base
Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. Pour tout système $S = (X_1, \dots, X_n)$ de n vecteurs de E, on a :

$$\det_{e'}(X_1, \dots, X_n) = \det_{e'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_e(X_1, \dots, X_n)$$

L'intérêt du déterminant réside dans la propriété suivante :

Théorème 19.13 : Le déterminant dans une base caractérise les systèmes liés
Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, e une base de E et un système $S = (X_1, \dots, X_n)$ de n vecteurs de E. Alors :

$$\underbrace{\big(S \text{ est lié}\big)}_{(i)} \iff \underbrace{\big(\det_e(X_1, \dots, X_n) = 0_{\mathbb{K}}\big)}_{(ii)}$$

19.4 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 19.14 : Déterminant d'un endomorphisme
Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et un endomorphisme $u \in L(E)$. Soit une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Le scalaire

$$\det_e\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$$

est indépendant de la base e : il ne dépend que de l'endomorphisme u et on le note $\det(u)$.

Théorème 19.14 : Propriétés du déterminant d'endomorphismes
Soient deux endomorphismes $(u,v) \in L(E)^2$. Alors :

1. $\det(\mathrm{id}_E) = 1_{\mathbb{K}}$, $\det(0_E) = 0_{\mathbb{K}}$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$;
2. $\boxed{\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)}$;
3. $(u \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})) \iff (\det(u) \neq 0)$;
4. Si $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$, alors $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

Remarque 220.

1. L'application $\det : L(E) \mapsto \mathbb{K}$ n'est pas linéaire. En général, on n'a pas $\det(u+v) = \det(u) + \det(v)$.
2. Le déterminant est un morphisme de groupes :

$$\det : \begin{cases} (\mathrm{GL}(\mathbb{E}),\circ) & \longrightarrow & (\mathbb{K}^\star,\times) \\ u & \mapsto & \det(u) \end{cases}$$

19.5 Calcul de déterminants

Définition 19.15 : Déterminant d'une matrice carrée
Soit une matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

On appelle déterminant de cette matrice A, le scalaire

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

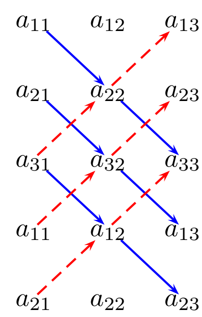
`Exemple 32.`

1. En dimension 2,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

2. En dimension 3, on dispose de la règle de Sarrus pour calculer un déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$



Théorème 19.15 : Propriétés du déterminant d'une matrice

Soit deux matrices carrées $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et e une base de l'espace E. On a les propriétés suivantes :

1. $\exists! u \in L(E)$ tq $A = \mathrm{Mat}_e(u)$. Alors $\det(A) = \det(u)$.
2. (A inversible) $\iff$ ($\det(A) \neq 0$).
3. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
4. Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
5. Deux matrices semblables ont même déterminant.
6. $\det(C_1, \dots, C_i - \sum_{k \neq i} \lambda_k C_k, \dots, C_n) = \Delta$.
7. $\det(C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$.
8. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
9. On change le signe du déterminant en inversant deux colonnes. Plus généralement, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\det\big(C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)}\big) = \varepsilon(\sigma)\det(C_1, \dots, C_n)$.
10. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux :
$$\begin{vmatrix} d_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ D & & d_n \end{vmatrix} = d_1 \dots d_n$$
11. $\det(A) = \det({}^tA)$. Grâce à cette remarque, les propriétés citées sur les colonnes de la matrices sont encore vraies sur les lignes.
12. Si A est une matrice $p \times p$, C une matrice carrée $(n-p)\times(n-p)$ et B une matrice rectangulaire $p \times (n-p)$, on a la formule suivante pour le calcul d'un déterminant par blocs :
$$\begin{vmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{vmatrix} = \det(A)\det(C)$$

Définition 19.16 : Cofacteurs

Soit un déterminant d'une matrice $n \times n$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. On note m_{ij} le déterminant $(n-1)\times(n-1)$ obtenu en barrant la ième ligne et la jième colonne de Δ. m_{ij} s'appelle le *mineur* relatif à a_{ij}
2. On appelle *cofacteur* de Δ relatif à a_{ij}, le scalaire $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$

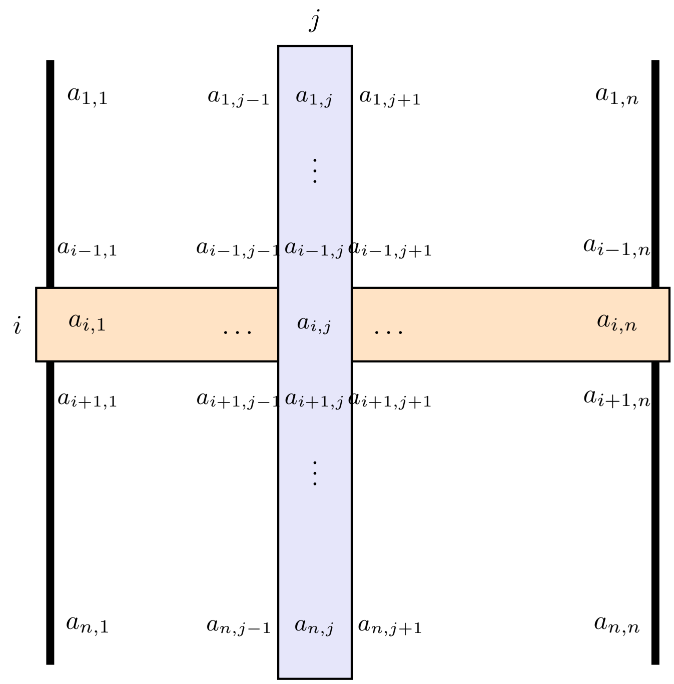


FIG. 19.5 – *mineur m_{ij} d'un déterminant*

THÉORÈME 19.16 : **Développement d'un déterminant par rapport à une ligne-colonne**
Soit un déterminant $n \times n$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. Développement par rapport à la jième colonne :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij}$$

2. Développement par rapport à la ième ligne :

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij}$$

Pour calculer un déterminant $n \times n$, $(n \geq 3)$, on dispose de la stratégie générale suivante :

1. À une colonne (ligne), retrancher un multiple d'une autre colonne (opération élémentaire sur les colonnes codée $C_i \leftarrow C_i - \lambda C_j$ ou bien $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$). La valeur du déterminant est inchangée ;
2. Répéter l'étape 1 de telle façon à faire apparaître un maximum de zéros dans une ligne (ou une colonne) ;
3. Développer le déterminant par rapport à cette ligne (colonne) ;
4. Recommencer avec le déterminant $(n-1) \times (n-1)$ obtenu, jusqu'à aboutir à un déterminant 2×2 que l'on sait calculer.

Il existe plusieurs autres techniques de calcul d'un déterminant que l'on verra dans les exercices.

Exercice 19-10

Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 19-11

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

Exercice 19-12

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & & & \mathbf{0} & \\ & -a_2 & a_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & \dots & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 19-13

Calculer le déterminant « tridiagonal » Δ_n en trouvant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & c & & & \mathbf{0} \\ b & a & c & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ \mathbf{0} & & & b & a \end{vmatrix}$$

Application : Calculer le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Définition 19.17 : **Comatrice**

Soit une matrice carrée $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *comatrice* de la matrice A, la matrice dont les coefficients sont les cofacteurs de A :

$$\widetilde{A} = ((\Delta_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

Théorème 19.17 : **Relation entre matrice et comatrice**

1. Pour toute matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on a la relation

$$\boxed{A\,{}^t\widetilde{A} = \det(A) I_n}$$

2. Si la matrice A est inversible, alors

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\widetilde{A}}$$

Remarque 221. Pour une matrice A d'ordre 2×2, la formule précédente donne l'inverse de A :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Lorsque la taille de la matrice dépasse 3, cette formule n'a qu'un intérêt théorique. En effet, pour calculer l'inverse d'une matrice $n \times n$ à l'aide de cette formule, il faut calculer $n^2 + 1$ déterminants $n \times n$!

Exercice 19-14

Déterminer le déterminant de la comatrice $\widetilde{A}$ en fonction de $\det(A)$.

DÉFINITION 19.18 : **Déterminant de Vandermonde** [a]

Soient n scalaires $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle déterminant de Vandermonde, le déterminant $n \times n$:

$$V(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

[a] Alexandre Théophile Vandermonde (28/02/1735-01/01/1796), Français. Musicien de formation, il s'intéresse aux mathématiques à l'age de 35 ans. Ses travaux portent sur la théorie des déterminants

THÉORÈME 19.18 : **Calcul d'un déterminant de Vandermonde**

$$V(a_1,\dots,a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

En particulier, la matrice de Vandermonde est inversible si et seulement si tous les scalaires $(a_1,\dots,a_n)$ sont distincts.

Exercice 19-15

On considère n réels distincts $(a_1,\dots,a_n)$ et n scalaires $(b_1,\dots,b_n)$. Écrire le polynôme d'interpolation de Lagrange L relativement à ces n points de coordonnées (a_i,b_i). Comment trouver les coefficients de ce polynôme L dans la base canonique?
