Chapitre 11

Dérivées

11.1 Dérivée

Dans la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 11.1 : **Dérivée d'une fonction**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, et un point $x_0 \in I$.
On définit le *taux d'accroissement* de la fonction f au point x_0 :

$$\Delta_{x_0} f : \begin{cases} I \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{cases}$$

1. On dit que la fonction f est dérivable à droite (respectivement à gauche) au point x_0 lorsque le taux d'accroissement $\Delta_{x_0}(x)$ admet une limite finie lorsque $x \to x_0$ à droite (respectivement à gauche).
2. Lorsque la fonction f admet une dérivée à droite (resp. à gauche), on note $f'_d(x_0)$ (respectivement $f'_g(x_0)$) la limite du taux d'accroissement.
3. On dit que la fonction f est dérivable au point x_0 lorsque le taux d'accroissement $\Delta_{x_0}(x)$ admet une limite finie lorsque $x \to x_0$. On note $f'(x_0)$ cette limite.

Théorème 11.1 : **DL à l'ordre 1 d'une fonction dérivable**
La fonction f est dérivable au point x_0 si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : I \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ et un réel $c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

On a alors $c = f'(x_0)$.

Remarque 98. On peut écrire le DL(x_0,1) de la façon suivante :

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + R(x)$$

où $R(x) = o(x - x_0)$. La droite d'équation $y = g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x_0. La fonction $|R(x)| = |f(x) - g(x)|$ représente la distance entre le point $\big(x,f(x)\big)$ de la courbe représentative de f et le point correspondant $\big(x,g(x)\big)$ de sa tangente. L'hypothèse sur le reste dit que cette distance tend vers 0 plus vite qu'une fonction linéaire.

Remarque 99. Le DL(x_0,1) peut également s'écrire :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \text{ tq } x_0 + h \in I,\ f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

Corollaire 11.2 : **Dérivabilité implique continuité**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Alors

$$(f \text{ dérivable au point } x_0) \Rightarrow (f \text{ continue au point } x_0)$$

Remarque 100. La réciproque est bien entendu fausse ($f(x) = |x|$)

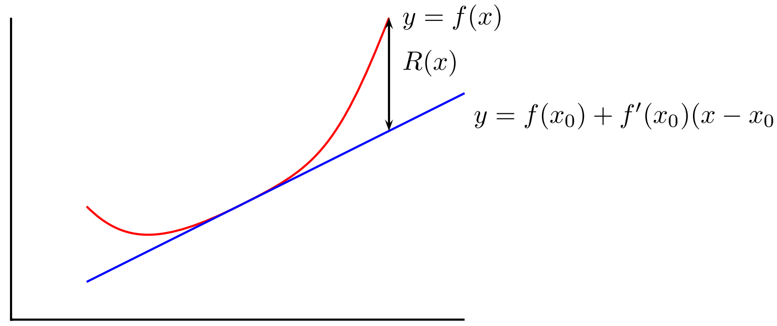


FIG. 11.1 – *Interprétation du DL1*

DÉFINITION 11.2 : **Dérivabilité sur un intervalle**
On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$. On définit alors la fonction dérivée :

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$$

THÉORÈME 11.3 : **Règles de calcul de dérivées**
Si u et v sont deux fonctions dérivables en un point $x_0 \in I$, on a les propriétés suivantes :

1. la fonction $(u + v)$ est dérivable au point x_0 et
$$(u + v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$
2. pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $(\lambda.u)$ est dérivable au point x_0 et
$$(\lambda.u)'(x_0) = \lambda \times u'(x_0)$$
3. la fonction (uv) est dérivable au point x_0 et
$$(uv)'(x_0) = u'(x_0) \times v(x_0) + u(x_0) \times v'(x_0)$$
4. si $v(x_0) \neq 0$, il existe un voisinage de x_0 sur lequel la fonction v ne s'annule pas et alors la fonction $(1/v)$ est dérivable au point x_0 avec
$$(1/v)'(x_0) = -\frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$
5. si $v(x_0) \neq 0$, la fonction (u/v) est dérivable au point x_0 avec
$$(u/v)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$
6. pour un entier $n \in \mathbb{Z}$ la fonction (u^n) est dérivable au point x_0 et
$$(u^n)'(x_0) = nu^{n-1}(x_0) \times u'(x_0)$$

Remarque 101. On en déduit que si les fonctions u et v sont dérivables sur un intervalle I, alors la fonction (uv) est dérivable sur I avec $(uv)' = u'v + uv'$ ...

Théorème 11.4 : **Dérivation des fonctions composées**
Soient deux fonctions $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $g : J \mapsto \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. On suppose que :
- H1 la fonction f est dérivable au point x_0 ;
- H2 la fonction g est dérivable au point $g(x_0)$.

Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable au point x_0 avec

$$(g \circ f)'(x_0) = \Big[g'\big(f(x_0)\big)\Big] \times f'(x_0)$$

On en déduit que si :
- H1 la fonction f est dérivable sur l'intervalle I ;
- H2 la fonction g est dérivable sur l'intervalle J ;

alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur l'intervalle I avec

$$(g \circ f)' = [g' \circ f] \times f'$$

Théorème 11.5 : **Dérivation de la bijection réciproque**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $x_0 \in I$. On suppose que :
- H1 f est strictement monotone sur l'intervalle I ;
- H2 f est dérivable au point x_0 ;
- H3 $f'(x_0) \neq 0$.

On sait déjà que f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle $J = f(I)$ et alors la fonction f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ avec

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

On en déduit que si :
- H1 $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est strictement monotone sur l'intervalle I ;
- H2 f est dérivable sur l'intervalle I ;
- H3 $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$;

alors la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$ avec

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

11.2 Dérivées successives

Définition 11.3 : **Dérivées successives**
On définit lorsqu'elles existent les fonctions f'' par $(f')'$ et par récurrence :

$$\begin{cases} f^{(0)} & = f \\ \forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k+1)} & = (f^{(k)})' = (f')^{(k)} \end{cases}$$

On notera $\mathcal{D}_k(I)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur l'intervalle I.

Définition 11.4 : **Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$**
On dit qu'une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I si et seulement si elle est k-fois dérivable sur l'intervalle I et si la fonction $f^{(k)}$ est continue sur l'intervalle I.
On note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur l'intervalle$I$.

Remarque 102. la continuité en un point est une notion de régularité plus faible que la dérivabilité en un point, qui est elle-même plus faible que de dire que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle contenant ce point.

$$\mathcal{C}^0(I) \supset \mathcal{D}_1(I) \supset \mathcal{C}^1(I) \supset \mathcal{D}_2(I) \supset \mathcal{C}^2(I) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^\infty(I)$$

Exercice 11-1

Etudier la régularité de la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 11-2

Exprimer la dérivée k^e de la fonction définie par $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 11.6 : **$\mathcal{C}^n(I)$ est un stable par somme**

Soient $(f,g) \in \mathcal{C}^n(I)$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. alors $(\lambda.f + \mu.g) \in \mathcal{C}^n(I)$.

Théorème 11.7 : **Formule de Leibniz** [a]

Soient deux fonctions f,g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I. Alors la fonction (fg) est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I et on a la formule de Leibniz qui exprime la dérivée nième du produit :

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}}$$

[a] Gottfried Whilhelm von Leibniz (01/07/1646-14/11/1716), Allemand. À l'origine avec Newton du calcul différentiel.

Exercice 11-3

On considère la fonction définie par $f(x) = (x^2+1)e^{2x}$. Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x)$.

Théorème 11.8 : **La composée de fonctions $\mathcal{C}^n$ est $\mathcal{C}^n$**

Si $f \in \mathcal{C}^n(I,J)$ et $g \in \mathcal{C}^n(J,\mathbb{R})$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.

Il n'y a pas de formule simple qui donne $(g \circ f)^{(n)}$.

Définition 11.5 : **Difféomorphisme**

Soit un intervalle I, et une application $\phi : I \mapsto \mathbb{R}$. Soit un entier $k \geq 1$. On dit que l'application ϕ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de l'intervalle I vers l'intervalle $f(I)$ si et seulement si :

1. ϕ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I ;
2. ϕ réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle $J = f(I)$;
3. La bijection réciproque $\phi^{-1} : J \mapsto I$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle J.

Remarque 103. Si une fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et si $\forall x \in I$, $\phi'(x) \neq 0$, alors ϕ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de I vers $J = f(I)$.

11.3 Théorème de Rolle et des accroissements finis

Théorème 11.9 : **En un extremum local intérieur, la dérivée s'annule**

Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, et un point $a \in I$. On suppose que

- H1 a est un point *intérieur* à I ;
- H2 a est un extremum local de f ;
- H3 f est dérivable au point a.

Alors $f'(a) = 0$.

Remarque 104. $f'(a) = 0$ n'est pas une condition suffisante (penser à $f(x) = x^3$). Cependant, si l'on sait que f présente un extremum en un point de I et si f est dérivable alors on cherchera ce point parmi les solutions de $f'(x) = 0$ ou aux extrémités de I.

THÉORÈME 11.10 : **Théorème de Rolle** [a]
Soit une fonction f : $[a,b]$. On suppose que :
- H1 f est continue sur le segment $[a,b]$;
- H2 f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$;
- H3 $f(a) = f(b)$.

Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

[a] Michel Rolle, 21/04/1652 – 08/11/1719, mathématicien français à l'origine de la notation $\sqrt[n]{x}$.

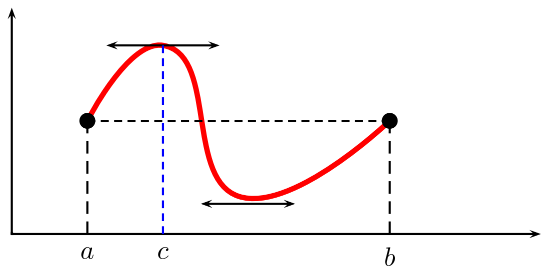


FIG. 11.2 – *Théorème de Rolle*

Exercice 11-4

On considère la fonction polynômiale $P(x) = x^n + ax + b$ avec $n \geq 2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction P possède au plus trois racines réelles distinctes.

Exercice 11-5

Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
C'est le théorème de Darboux [1] : si une fonction est dérivable, alors la fonction dérivée f' vérifie les conclusions du théorème des valeurs intermédiaires même si la fonction f' n'est pas continue.

Exercice 11-6

Généralisation du théorème de Rolle
Si une fonction f : $[a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ vérifie :
- H1 f est continue sur $[a, +\infty[$;
- H2 f est dérivable sur $]a, +\infty[$;
- H3 $f(a) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Alors $\exists c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

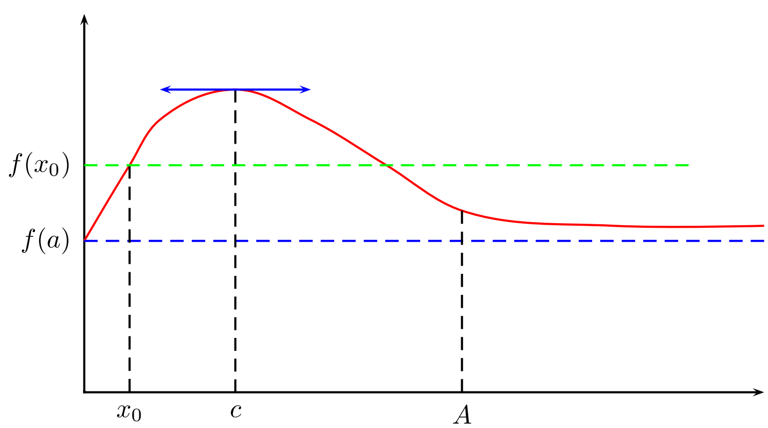


FIG. 11.3 – *Généralisation du théorème de Rolle*

1. Gaston Darboux, (14/08/1842 – 23/02/1917) Français, a démontré de nombreux théorèmes en géométrie différentielle, et a construit une intégrale qui porte son nom.

THÉORÈME 11.11 : **Théorème des accroissements finis**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

- (H1) f est continue sur le segment $[a,b]$;
- (H2) f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.

Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

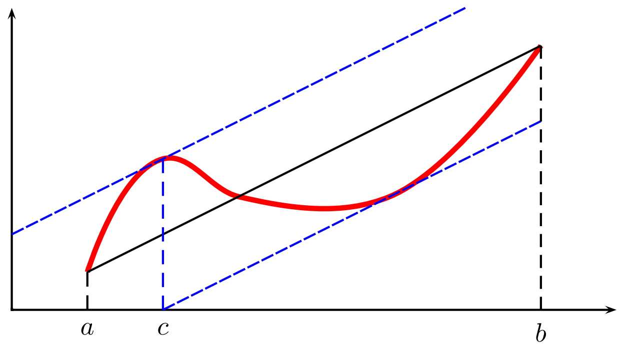


FIG. 11.4 – *Théorème des accroissements finis*

THÉORÈME 11.12 : **Inégalité des accroissements finis**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ définie sur un segment et un réel $M \in \mathbb{R}$. On suppose que :

- (H1) la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$;
- (H2) la fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$;
- (H3) $\forall x \in]a,b[,\ |f'(x)| \le M$.

Alors $|f(b) - f(a)| \le M|b-a|$.

COROLLAIRE 11.13 : **Une fonction à dérivée bornée est lipschitzienne**
Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et un réel $k \ge 0$. On suppose que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I. Alors

$$(\forall x \in I,\ |f'(x)| \le k) \iff (f \text{ est } k-\text{lipschitzienne sur } I)$$

Remarque 105. On en déduit qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ est lipschitzienne.

Exercice 11-7

Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a,b]$ telle que :

- (H1) la fonction f' est continue sur le segment $[a,b]$;
- (H2) la fonction f' est dérivable sur l'intervalle $]a,b[$.

Soit un réel $x_0 \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(x_0) - \left[f(a) + (x_0 - a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right] = \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} f''(c)$$

Remarque 106. On se sert souvent du TAF pour passer d'une hypothèse locale (propriété de f') à une propriété globale (relation entre $f(b)$ et $f(a)$) comme dans le théorème suivant.

THÉORÈME 11.14 : **Caractérisation des fonctions constantes, monotones**
On suppose que :

- (H1) f est une fonction continue sur le segment $[a,b]$;
- (H2) f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.

On a les résultats suivants :

1. $\big(\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \ge 0\big) \iff \big(f \text{ est croissante sur} [a,b]\big)$;
2. $\big(\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0\big) \Rightarrow \big(f \text{ est strictement croissante sur } [a,b]\big)$;
3. $\big(\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0\big) \iff \big(f \text{ est constante sur le segment } [a,b]\big)$.

Remarque 107. – Ces résultats s'étendent à un intervalle quelconque I : si une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intérieur de l'intervalle I, et si pour tout point x intérieur à I, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I. On a les mêmes caractérisations pour les fonctions décroissantes.

– La réciproque de (2) est fausse : si $f(x) = x^3$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée s'annule en 0.

– Il est important dans ce théorème que I soit un *intervalle*. Si $I = [0,1] \cup [2,3]$, et si $f = 1$ sur $[0,1]$, $f = 0$ sur $[2,3]$, on a bien $f' = 0$ et pourtant la fonction f n'est pas constante sur l'ensemble I.

DÉFINITION 11.6 : **Primitives**
Soit deux fonctions f et F définies sur un intervalle I. On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I si et seulement si :
1. la fonction F est dérivable sur I ;
2. $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

THÉORÈME 11.15 : **Deux primitives diffèrent d'une constante**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et deux primitives $F,G :\mapsto \mathbb{R}$ de la fonction f sur l'intervalle I. Alors ces deux primitives diffèrent d'une constante :

$$\exists C \in \mathbb{R} \text{ tq } \quad \forall x \in I,\ G(x) = F(x) + C$$

COROLLAIRE 11.16 : **Primitivation d'égalités et d'inégalités**
Soient deux fonctions f, $g : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivables sur un intervalle I.
1. Si
$$\forall x \in I,\ f'(x) = g'(x)$$
Alors pour tous points $(a,b) \in I^2$, on a
$$f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$$
2. Si
$$\forall x \in I,\ f'(x) \le g'(x)$$
alors pour tous points $(a,b) \in I^2$, avec $a \le b$, on a
$$f(b) - f(a) \le g(b) - g(a)$$

THÉORÈME 11.17 : **Théorème du prolongement dérivable**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant :
H1 la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$;
H2 la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]a,b]$;
H3 $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ où $l \in \mathbb{R}$.
Alors la fonction f est dérivable au point a et $f'(a) = l$.

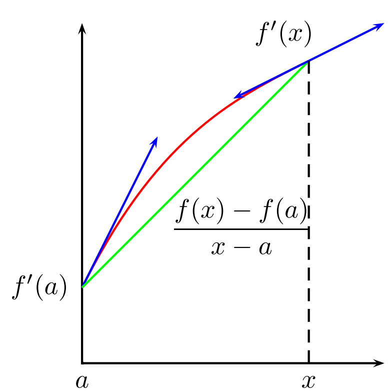


FIG. 11.5 – *Prolongement dérivable*

Remarque 108. Considérons la fonction :

$$f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Elle est continue sur le segment $[0,1]$, dérivable sur $[0,1]$ mais la fonction dérivée f' n'a pas de limite lorsque $x \to 0$. Cela montre que la réciproque du théorème précédent est fausse.

Exercice 11-8

Soit $f :]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-1/x}$. Etudier le prolongement de la fonction f en 0.

Exercice 11-9

Une généralisation utile du théorème précédent. Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que :

1. f est continue sur le segment $[a,b]$;
2. f est dérivable sur l'intervalle $]a,b]$;
3. $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

Montrer que

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$$

En d'autres termes, le graphe de f présente une demi-tangente verticale au point a et n'est donc pas dérivable au point a.

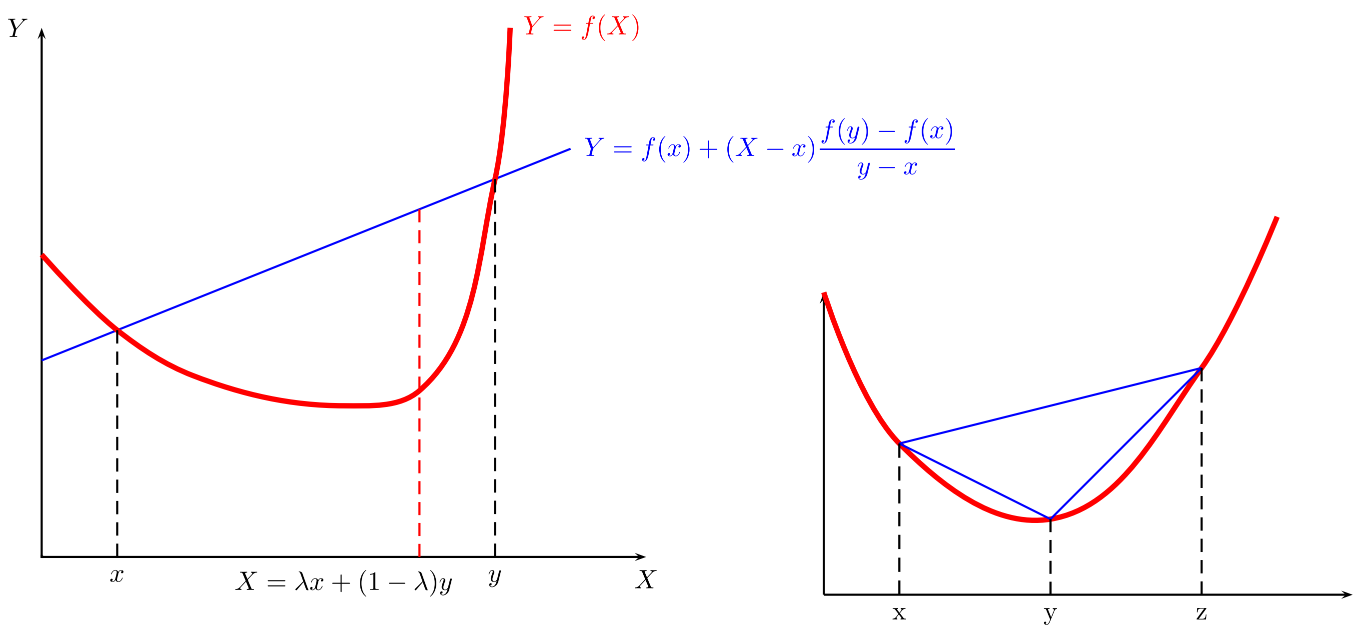
11.4 Fonctions convexes.

Définition 11.7 : Fonction convexe

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est *convexe* lorsque

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Remarque 109. Cela signifie géométriquement que le graphe de f est situé en dessous de toutes les cordes joignant deux points de ce graphe.



(a) Fonction convexe

(b) Lemme des trois pentes

Fig. 11.6 – *Fonctions convexes*

Remarque 110. On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est *concave* lorsque

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

La fonction f est concave si et seulement si la fonction $-f$ est convexe. Dans la suite, on n'étudiera que les propriétés des fonctions convexes.

Remarque 111. Les fonctions qui sont à la fois convexes et concaves sont les fonctions affines.

DÉFINITION 11.8 : **Fonction strictement convexe**
On dit qu'une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est *strictement convexe* lorsque $\forall (x,y) \in I^2$, $x \neq y$,

$$\forall \lambda \in]0,1[, \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

PROPOSITION 11.18 : **Inégalité de convexité généralisée**
soit une fonction f convexe sur l'intervalle I. Alors

$$\forall n \geq 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n \text{ tq } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

LEMME 11.19 : **Lemme des trois pentes**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe :

$$\forall (x,y,z) \in I^3,\ x < y < z, \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Remarque 112. C'est le résultat principal sur les fonctions convexes.
Il est utilisé dans la majorité des démonstrations.

Exercice 11-10

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Montrer que f est constante.

THÉORÈME 11.20 : **Caractérisation des fonctions convexes dérivables**

1. Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable,

$$(f \text{ convexe }) \iff (f' \text{ croissante })$$

2. Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est deux fois dérivable,

$$(f \text{ convexe }) \iff (f'' \geq 0 \text{ sur } I)$$

THÉORÈME 11.21 : **Le graphe d'une fonction convexe est situé au dessus de toutes ses tangentes**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ convexe et dérivable.

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I, \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

On obtient des inégalités intéressantes, dites « inégalités de convexité » de la façon suivante :

1. On se donne une fonction f ;
2. On vérifie qu'elle est convexe sur I en calculant f'' ;
3. On écrit l'inégalité de convexité (éventuellement généralisée).

Exercice 11-11

a) Montrer que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

b) Majorer pour $x,y > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $(x+y)^n$ en fonction de x^n et y^n.

Exercice 11-12

a) Ecrire une inégalité de convexité en utilisant la fonction $f(x) = -\ln(x)$.

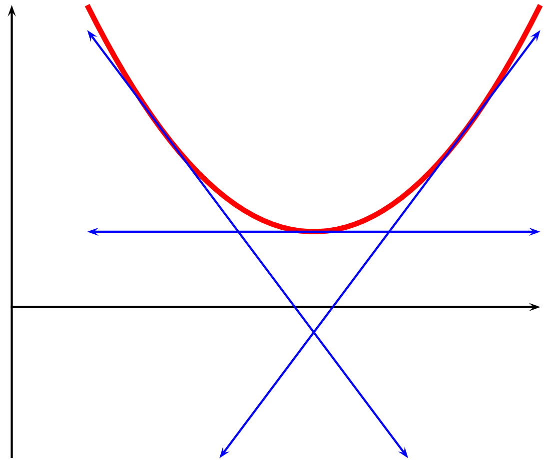


FIG. 11.7 – *Le graphe d'une fonction convexe est au dessus de toutes ses tangentes*

b) En déduire l'inégalité de Young : $\forall a > 0$, $b > 0$, $\forall p > 0$, $q > 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

c) Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2$,

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

(la moyenne géométrique de deux nombres est inférieure à la moyenne arithmétique).
d) Montrer que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+\star})^n$,

$$(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$
